PRELUCRAREA MATEMATICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

ÎNDRUMAR

Prelucrarea matematică şi analiza datelor experimentale se impune tot mai mult în cercul de probleme care intră azi în atenţia studenţilor institutelor tehnice şi economice, inginerilor, doctoranzilor şi cercetătorilor. Necunoaşterea în suficientă măsură a metodelor moderne de prelucrare matematică şi de analiză a rezultatelor obţinute în urma unui experiment antrenează dificultăţi mari şi conduce la utilizarea unor metode simpliste şi insuficient fundamentate.

Totuşi, numărul problemelor care apar în cazuri concrete de prelucrare a datelor experimentale nu este prea mare. Acestea sînt probleme de alegere a formulelor empirice şi estimare a parametrilor acestora, estimarea adevăratelor valori ale mărimilor măsurate şi precizia măsurărilor, probleme de cercetare a dependenţei stochastice, precum şi anumite probleme de analiză ca integrarea, diferenţierea şi interpolarea. Tocmai aceste probleme au stat în atenţia autorului îndrumarului de faţă.

Se presupune că cititorul posedă cunoştinţele fundamentale de matematici superioare din programa analitică obişnuită pentru institutele tehnice de învăţămînt superior, inclusiv elemente de teoria probabilităţilor. Anumite noţiuni asupra erorilor aleatoare de măsurare şi repartiţiilor lor sînt tratate înaintea problemelor de bază, deoarece metodele matematice de prelucrare a datelor experimentale se bazează în mod esenţial pe considerente probabilistice. Aici este foarte important nu numai faptul că toate datele obţinute în urma măsurărilor se consideră

ca variabile aleatoare, ci și faptul că toate concluziile se formulează cu o anumită probabilitate.

La sfîrșitul lucrării se dau o serie de reguli de calcul aproximativ, deoarece prelucrarea matematică a datelor experimentale se bazează în mod esențial pe calcule aproximative.

Pentru a înlesni utilizarea îndrumarului se dau într-o anexă principalele tabele cu valori numerice utile în aplicații.

Autorul

CUPRINS

1. Erori de măsurare

1.1. Clasificarea erorilor de măsurare 9
1.2. Repartiția erorilor aleatoare de măsurare 12
1.3. Metode de eliminare a erorilor grosolane 17

2. Valori medii și estimațiile lor. Verificarea ipotezelor

2.1. Valori medii, metode de calcul 21
2.2. Estimații ale adevăratei valori a unei mărimi măsurate . . . 28
2.3. Compararea valorilor medii 39
2.4. Estimarea preciziei măsurărilor 45
2.5. Compararea dispersiilor 51
2.6. Verificarea normalității repartiției 55

3. Determinarea parametrilor formulelor empirice prin metoda celor mai mici pătrate

3.1. Metoda celor mai mici pătrate 61
3.2. Aflarea parametrilor (coeficienților) polinoamelor 65
3.3. Polinoame ortogonale Cebișev pentru puncte echidistante 77
3.4. Reguli generale de estimare a parametrilor 84
3.5. Metode aproximative și simplificate de determinare a parametrilor ce intră neliniar în formulele empirice 92

4. Alegerea formulelor empirice și netezirea

4.1. Alegerea gradului optim al polinomului 103
4.2. Alegerea ordinului unui polinom trigonometric 110
4.3. Alegerea dintre mai multe formule 112
4.4. Ajustarea datelor empirice 115

5. Dependența stochastică

5.1. Corelație liniară 122
5.2. Corelație neliniară 137
5.3. Corelație liniară multiplă 139

6. Unele probleme de analiză a datelor experimentale

6.1. Integrare numerică 142
6.2. Derivare numerică 158
6.3. Interpolare 166

Anexe

A. Calcul aproximativ și estimarea erorii de rotunjire 183
B. Tabele 193

CAPITOLUL 1

ERORI DE MĂSURARE

1.1. Clasificarea erorilor de măsurare

Valorile numerice ale mărimilor fizice se obţin ca rezultat al măsurării lor, adică a comparării lor cu o altă mărime de acelaşi gen, luată ca unitate. Odată ales sistemul de unităţi, rezultatele măsurărilor se exprimă cu ajutorul unor numere determinate. Se ştie că în cazul măsurărilor făcute cu o suficientă precizie asupra unei mărimi, rezultatele măsurărilor diferă unul de altul şi, prin urmare, ele sînt afectate de erori.

Prin *eroare de măsurare* înţelegem diferenţa $x-a$ între rezultatul măsurării şi valoarea adevărată a mărimii măsurate. Eroarea de măsurare este de obicei necunoscută, deoarece nu se cunoaşte însăşi adevărata valoare a mărimii măsurate (cu excepţia cazului cînd se măsoară mărimi cunoscute, măsurări ce se fac cu scopul special de a studia erorile de măsurare, de exemplu atunci cînd se determină precizia de măsurare a unui aparat).

Una din principalele probleme ale prelucrării matematice a rezultatelor experimentale este estimarea adevăratelor valori ale mărimilor măsurate pe baza rezultatelor obţinute. Cu alte cuvinte, după măsurarea repetată a mărimii a şi obţinerea unui şir de valori, fiecare dintre ele conţinînd o anumită eroare necunoscută, se pune problema calculării valorii aproximative a lui a cu o eroare cît mai mică posibil. Pentru rezolvarea acestei probleme (cu o

precizie de măsurare dată) trebuie să cunoaștem principalele proprietăți ale erorilor de măsurare și posibilitățile de utilizare a lor.

1.1.1. *Erori grosolane*

Mai întîi de toate vom preciza că nu vom supune prelucrării matematice rezultatele măsurărilor neconforme cu realitatea (*eșecuri de măsurare*) sau, cum vom mai spune, rezultatele ce conțin erori grosolane. *Erorile grosolane* apar ca urmare a încălcării principiilor generale de măsurare sau ca rezultat al neatenției experimentatorului (de exemplu, datorită unei proaste iluminări experimentatorul să scrie „8" în loc de „5" sau de „3". Odată descoperite (detectate) erorile grosolane ale rezultatelor măsurărilor, ele urmează să fie înlăturate, iar măsurările respective trebuie repetate (dacă este posibil acest lucru).

Ceea ce este caracteristic unui rezultat ce conține o eroare grosolană este faptul că acesta diferă esențial ca valoare de rezultatele celorlalte măsurări. Tocmai pe această proprietate se bazează criteriul de excludere a erorilor grosolane în funcție de mărimea lor (vezi 1.3), cu toate că cea mai sigură și, în același timp, cea mai eficientă dintre metodele de eliminare a rezultatelor neconforme cu realitatea rămîne eliminarea lor încă în procesul măsurărilor.

Peste tot în îndrumarul de față se consideră că rezultatele măsurărilor supuse prelucrării matematice nu conțin erori grosolane.

1.1.2. *Erori sistematice*

Erorile de măsurare se datoresc unui mare număr de cauze (factori) ce acționează în cursul acestui proces. Uneori cînd se efectuează o serie de măsurări, reușim să îndepărtăm anumite cauze ale erorilor, al căror efect poate fi măsurat. De exemplu, dacă după ce s-au efectuat măsurările s-a decsoperit o reglare incorectă a aparatului de măsurat, care a condus la o deplasare a originii de

calcul, atunci toate valorile obținute pe baza măsurărilor vor fi deplasate cu o mărime constantă, dacă scara aparatului este uniformă, sau cu o mărime care variază după o lege determinată, dacă scara aparatului este neuniformă. Alt exemplu de cauză care conduce la apariția erorilor sistematice îl constituie variația condițiilor exterioare, de pildă temperatura, dacă este cunoscută influența condițiilor asupra rezultatelor măsurărilor. La cauzele amintite de apariție a erorilor poate să conducă și o anumită neconcordanță a datelor obținute la extremitățile scării aparatelor de măsurat.

Convenim să spunem că fiecare din astfel de cauze conduce la *erori sistematice*. Depistarea erorilor sistematice provocate de fiecare cauză separat necesită investigații speciale (de exemplu măsurarea aceleiași mărimi prin metode diferite sau măsurarea cu același aparat a mai multor etaloane sau mărimi cunoscute. După ce erorile sistematice au fost depistate și determinate valorile lor, ele pot fi ușor eliminate, introducîndu-se corecțiile corespunzătoare în rezultatele obținute în urma măsurărilor. De aceea în îndrumarul de față vom considera că *înaintea prelucrării matematice a datelor experimentale, toate erorile sistematice au fost depistate și înlăturate.*

Subliniem faptul că eroarea generală a fiecărui rezultat rămîne necunoscută, așa că nu se va urmări separarea din eroarea generală a unei anumite părți sub formă de eroare sistematică, ci numai introducerea unei corecții asupra efectului cunoscut al acelor factori care au fost depistați.

1.1.3. *Erori aleatoare*

Erorile de măsurare care au rămas după eliminarea tuturor erorilor sistematice apărute, adică erorile rezultatelor măsurărilor modificate prin introducerea corecțiilor corespunzătoare le vom numi erori aleatoare. *Erorile aleatoare* apar din cauza unei mulțimi de factori a căror influență individuală este neglijabilă, din care cauză nu există posibilitatea depistării și înlăturării acestor influențe (la nivelul tehnicii și preciziei de măsurare). Eroarea aleatoare poate fi considerată ca rezultanta tuturor efectelor unor astfel de factori.

Erorile aleatoare sînt inevitabile; ele nu pot fi înlăturate din rezultatele individuale ale măsurărilor. Cu ajutorul teoriei probabilităților se poate lua însă în considerație în ce măsură ele influențează estimațiile adevăratelor valori ale mărimilor măsurate, ceea ce permite determinarea valorii mărimii măsurate cu o eroare oricît de mică în raport cu erorile măsurărilor individuale (vezi 2.2). Studiul influenței erorilor aleatoare se bazează pe cunoașterea legilor lor de repartiție (vezi 1.2).

1.2. Repartiția erorilor aleatoare de măsurare

1.2.1. *Model probabilistic*

Erorile aleatoare de măsurare sînt caracterizate de o lege de repartiție bine determinată. Existența unei astfel de legi poate fi stabilită repetînd de un număr mare de ori, în condiții identice, măsurarea unei anumite mărimi și considerînd numărul m de rezultate ale măsurărilor ce cad într-un anumit interval: raportul dintre acest număr și numărul n al tuturor măsurărilor efectuate (*frecvența relativă de a cădea în intervalul considerat*) pentru un număr suficient de mare de măsurări se apropie de o anumită constantă (desigur, caracteristică intervalului). Această situație permite aplicarea teoriei probabilităților la studiul erorilor aleatoare de măsurare.

În modelul probabilistic teoretic erorile aleatoare $z = x - a$ (și prin urmare, înseși rezultatele măsurărilor $x = a + z$) se consideră ca *variabile aleatoare* ce pot lua orice valoare reală, iar fiecărui interval (z_1, z_2) îi corespunde un număr bine determinat, numit *probabilitatea ca variabila aleatoare z să ia valori în acest interval* și pe care o notăm $P(z_1 < z < z_2)$ sau $P(z \in (z_1, z_2))$. Această probabilitate apare ca un caz ideal al frecvenței relative de a cădea în intervalul (z_1, z_2), adică în practică tocmai de această probabilitate se apropie frecvența relativă amintită mai sus:

$$\frac{m}{n} \approx P(z_1 < z < z_2).$$

Regula care ne permite ca pentru fiecare interval (z_1, z_2) să găsim probabilitatea $P(z_1 < z < z_2)$ se numește *lege de repartiție a variabilei aleatoare z*. În toate problemele considerate în îndrumarul de față, legea de repartiție se exprimă cu ajutorul unei integrale

$$P(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} p(z)\,dz, \qquad (1.1)$$

unde $p(z)$ este o anumită funcție nenegativă care satisface condiția de normare

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)\,dz = 1.$$

Această funcție determină complet repartiția corespunzătoare și poartă numele de *densitate de repartiție*.

1.2.2. *Repartiția normală*

Cel mai adesea se ia ca lege de repartiție a erorilor aleatoare de măsurare *repartiția normală* (*legea lui Gauss*). Densitatea de repartiție a legii normale este dată de

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/(2\sigma^2)}, \qquad (1.2)$$

unde parametrul σ ($\sigma > 0$) caracterizează precizia măsurărilor. Graficul densității de repartiție îl vom numi *curbă de repartiție*.

În fig. 1.1 este dată curba de repartiție a legii normale pentru diferite valori ale parametrului σ. Din această figură se vede că atunci cînd σ se micșorează, curba de repartiție se apropie foarte repede de axa Oz și taie axa $p(z)$ într-un punct din ce în ce mai depărtat de origine; prin urmare, cu cît mai mult se micșorează σ, cu atît mai repede descrește densitatea de repartiție $p(z)$ atunci cînd $|z|$ crește.

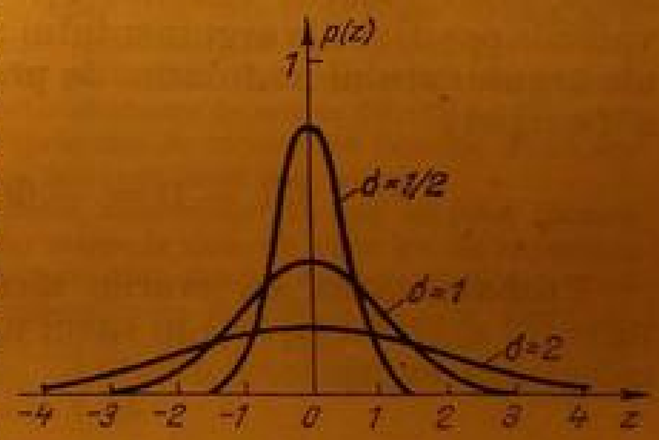

Fig. 1.1

Probabilitatea de a cădea în intervalul (z_1, z_2) exprimată de relația (1.1) este reprezentată grafic de aria corespunzătoare trapezului curbiliniu determinat de axa Oz, dreptele $z = z_1$ și $z = z_2$, precum și de curba de repartiție. În particular, probabilitatea de a cădea în intervalul *simetric* $(-z_1, z_1)$, $z_1 > 0$, este reprezentată de partea hașurată a figurii 1.2. De aici rezultă de asemenea faptul că, cu cît σ este mai mic, cu atît împrăștierea erorilor în jurul originii este mai mică.

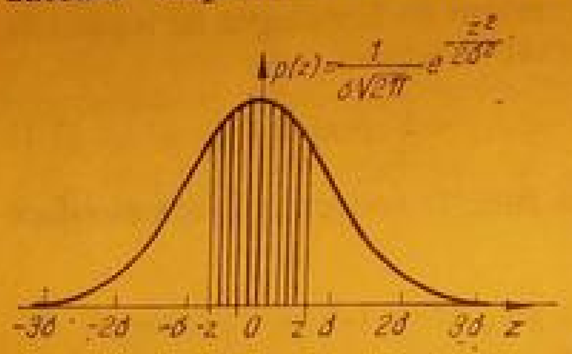

Fig. 1.2

Probabilitatea ca erorile aleatoare să cadă în intervalul simetric $(-z_1, z_1)$ în cazul unei repartiții normale se calculează cu ajutorul relației

$$P(-z_1 < z < z_1) = P\left(|z| < z_1\right) = 2\Phi(z_1/\sigma), \qquad (1.3)$$

unde

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2}\, dt = \frac{1}{2} P\left(|z| < t\sigma\right), \quad t > 0. \qquad (1.4)$$

Funcția $\Phi(t)$ se numește *probabilitate integrală*, iar valorile ei sînt date în tabelul I (Anexă, pag. 194). În acest tabel valorile funcției $\Phi(t)$ sînt date numai pentru valorile pozitive ale argumentului; pentru valorile negative ale argumentului ne folosim de proprietatea de imparitate a funcției:

$$\Phi(-t) = -\Phi(t).$$

Probabilitatea ca erorile aleatoare să cadă într-un interval arbitrar (z_1, z_2) în cazul unei repartiții normale se calculează cu ajutorul relației

$$P\left(z_1 < z < z_2\right) = \Phi(z_2/\sigma) - \Phi(z_1/\sigma). \qquad (1.5)$$

În sfîrșit, probabilitatea ca eroarea aleatoare să depășească limitele $\pm t\sigma$, $t > 0$, este egală cu

$$P\left(|z| > t\sigma\right) = 1 - 2\Phi(t). \qquad (1.6)$$

Pentru a ușura calculele, valorile probabilității $1 - 2\Phi(t)$ sînt date în tabelul II (Anexă, pag. 195) pentru valorile lui $t \geqslant 2{,}5$. Tot aici sînt date de asemenea și valorile funcției inverse $t = t(\mathscr{P})$, pentru care $1 - \mathscr{P} = 1 - 2\Phi(t)$, adică $\mathscr{P} = 2\Phi(t)$. Pentru valori mari ale argumentului t, probabilitatea dată de (1.6) este foarte mică. Așa, de exemplu,

$$P(|z| > 4\sigma) = 1 - 2\Phi(4) = 6 \cdot 10^{-5},$$

$$P(|z| > 5\sigma) = 1 - 2\Phi(5) = 6 \cdot 10^{-7}.$$

Probabilitatea ca variabila aleatoare z să depășească limitele $\pm 3\sigma$:

$$P(|z| > 3\sigma) = 1 - 2\Phi(3) = 0{,}0027 \qquad (1.7)$$

este suficient de mică, deci evenimentul ca eroarea aleatoare să iasă în afara intervalului de limite $\pm 3\sigma$ poate fi considerat ca un eveniment practic imposibil*. Cu alte cuvinte, se acceptă că *erorile aleatoare de măsurare sînt mărginite în valoare absolută de valoarea* 3σ (cu toate că modelul matematic considerat admite în principiu orice valoare a erorii).

Observație. Legea de repartiție normală a erorilor aleatoare este de obicei într-o bună concordanță cu experiența, ceea ce se poate verifica prin măsurarea unor mărimi cunoscute (etaloane), în care caz se pot calcula cu exactitate mărimile erorilor. În particular, legea normală reflectă *proprietatea de simetrie a erorilor* (erorile aleatoare de semne diferite se întîlnesc aproximativ la fel de des) și *proprietatea de concentrare* (erorile aleatoare mici în valoare absolută apar mai frecvent decît cele mari).

În îndrumarul de față majoritatea concluziilor se trag pe baza ipotezei de normalitate a repartiției erorilor aleatoare (sau că legea lor de repartiție este suficient de apropiată de cea normală). Dacă într-o anumită problemă avem motive să ne îndoim de normalitatea repartiției erorilor aleatoare, (de exemplu dacă erorile aleatoare ies în afara limitelor $\pm 3\sigma$ sau dacă este încălcată simetria repartiției lor), atunci rezultatele măsurărilor urmează să se supună prelucrării indicate în § 2.6.

* Rezultatul acesta este cunoscut ca *regula trei sigma* (*N. T.*).

Dacă erorile aleatoare z au legea normală de repartiție cu densitatea (1.2), atunci rezultatele măsurărilor $x = a + z$ au densitatea

$$\varphi_{a;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \qquad (1.8)$$

care diferă de (1.2) numai prin faptul că valorile variabilei sînt deplasate cu mărimea a. Legea de repartiție corespunzătoare se numește de obicei *legea normală centrată în a*. Dacă se ține seama de expresia (1.8), rezultă că densitatea de repartiție dată de (1.2) poate fi scrisă ca $\varphi_{0;\sigma}(z)$. În cazul erorilor aleatoare se presupune totdeauna că centrul repartiției lor este în origine.

1.2.3. *Indicatori ai preciziei de măsurare*

Parametrul σ se numește *eroare medie pătratică de măsurare* sau *eroare standard*. Pătratul mărimii σ se numește *dispersie a erorilor*. Legătura între dispersie și repartiție teoretică este dată la punctul 2.1.4.

În afara celor amintite, uneori se utilizează și alți indicatori ai preciziei măsurărilor. Legătura între diferiții indicatori de precizie în cazul repartiției normale a erorilor este dată în cele ce urmează.

Eroarea probabilă:

$$\rho = 0{,}6745\,\sigma, \quad 2\Phi(\rho) = 0{,}5. \qquad (1.9)$$

Eroarea medie absolută:

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, p(z)\, dz = \sigma \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}7979\,\sigma. \qquad (1.10)$$

Măsură a preciziei:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 0{,}7071 \frac{1}{\sigma}. \qquad (1.11)$$

1.3. Metode de eliminare a erorilor grosolane

Cînd s-au obținut rezultate ale măsurărilor ce diferă pronunțat de celelalte rezultate, este natural să bănuim că s-a strecurat o eroare grosolană. În acest caz este necesar să se verifice imediat dacă nu s-au încălcat normele generale de măsurare.

Dacă o astfel de verificare nu a fost făcută la timpul potrivit, atunci problema oportunității eliminării unei valori „apărute în mod neașteptat" se rezolvă pe baza comparării acestei valori cu celelalte rezultate ale măsurărilor. Pentru acest lucru există diferite criterii după cum se cunoaște sau nu eroarea medie pătratică σ a măsurărilor (se presupune că toate măsurările se fac cu același grad de precizie și independent una de alta).

1.3.1. *Metodă de eliminare pentru σ cunoscut*

Să notăm valoarea „apărută neașteptat" prin x_* și toate celelalte rezultate ale măsurărilor prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Calculăm media aritmetică a valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

(asupra modului de calculare a mediilor vezi § 2.1) și împărțim diferența $x_* - \bar{x}$ în valoare absolută la mărimea $\sigma\sqrt{(n+1)/n}$. Pentru raportul obținut

$$t = \frac{|x_* - \bar{x}|}{\sigma\sqrt{(n+1)/n}} \qquad (1.12)$$

calculăm probabilitățile $1 - 2\,\Phi(t)$ cu ajutorul tabelului II (Anexă, pag. 195). Acesta ne va da probabilitatea ca raportul considerat să ia întîmplător o valoare mai mare sau egală cu t, condiționat de faptul că valoarea x_* nu reprezintă o valoare cu eroare grosolană (adică eroarea rezultatului x_* este întîmplătoare). Dacă probabilitatea cal-

culată în modul indicat este foarte mică, atunci valoarea „apărută neașteptat" se consideră a fi cu o eroare grosolană și ea va fi exclusă din prelucrarea ulterioară a rezultatelor măsurărilor.

Cît de mică trebuie luată probabilitatea respectivă depinde de condițiile concrete ale problemei considerate: dacă se fixează un nivel mult prea mic al probabilității, atunci pot scăpa erori grosolane, iar dacă se ia acest nivel nejustificat de mare, atunci putem exclude rezultate cu erori aleatoare, necesare pentru o prelucrare corectă a rezultatelor măsurărilor.

De obicei se alege unul din următoarele trei nivele ale probabilității de excludere:

nivelul 5% (se exclud erorile a căror probabilitate de apariție este mai mică decît 0,05);

nivelul 1% (se exclud erorile a căror probabilitate de apariție este mai mică decît 0,01);

nivelul 0,1% (se exclud erorile a căror probabilitate de apariție este mai mică decît 0,001).

Pentru un nivel ales α (mic) al probabilității apariției „valorii neașteptate", se consideră că valoarea x_* conține o eroare grosolană, dacă probabilitatea corespunzătoare raportului t (1.12) satisface inegalitatea $1-2\Phi(t) < \alpha$. Pentru a sublinia caracterul probabilistic al acestei concluzii, vom spune că valoarea x_* conține o eroare grosolană cu siguranța* $\mathscr{P} = 1-\alpha$. Valoarea $t = t(\mathscr{P})$, pentru care $1-2\Phi(t) = \alpha$ și deci $2\Phi(t) = \mathscr{P}$, o vom numi *valoare critică* a raportului (1.12) cu siguranța $\mathscr{P}$. Astfel, dacă $\alpha = 0{,}01$ (nivel 1%), atunci $\mathscr{P} = 0{,}99$ iar valoarea critică $t = t(\mathscr{P}) = 2{,}576$ (vezi tabelul II din Anexă) și de îndată ce raportul (1.12) depășește această valoare critică, vom putea respinge valoarea „apărută neașteptat" x_* cu siguranța 0,99.

Exemplu. Fie o serie de 41 rezultate ale unor măsurări independente, efectuate cu eroarea medie pătratică $\sigma = 0{,}133$. În aceste măsurări s-a descoperit o valoare „apărută neașteptat" $x_* = 6{,}866$, iar media aritmetică a celorlalte 40 de rezultate a condus la valoarea $\bar{x} = 6{,}500$. Se poate considera că valoarea „apărută neașteptat" conține o eroare grosolană și deci să poată fi exclusă din prelucrările ulterioare?

* În literatura română de specialitate acest $\mathscr{P}$ este cunoscut ca nivel de încredere, în timp ce α este cunoscut ca prag de semnificație (*N.T.*).

Soluție. Diferența dintre valoarea „apărută neașteptat" și media aritmetică este $x_* - \bar{x} = 0{,}366$ și de aici raportul (1.12) este egal cu

$$t = \frac{0{,}366}{0{,}133\sqrt{41/40}} \approx 2{,}72.$$

Din tabelul II din anexă, valorii $t = 2{,}72$ îi corespunde probabilitatea $1-2\Phi(t) = 0{,}0066 < 0{,}007$. Prin urmare, cu o siguranță $\mathscr{P} > 0{,}993$ se poate considera că valoarea x_* conține o eroare grosolană și se va exclude din prelucrarea ulterioară a rezultatelor măsurărilor.

Subliniem încă o dată faptul că metoda indicată se aplică numai atunci cînd valoarea σ a abaterii medii pătratice a erorilor este cunoscută dinainte.

1.3.2. *Metodă de excludere pentru σ necunoscut*

Dacă valoarea σ nu se cunoaște dinainte, atunci aceasta se estimează pe baza rezultatelor măsurărilor (vezi § 2.4), adică în locul lui σ se ia abaterea standard empirică

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,.$$

În acest caz mărimea diferenței între valoarea „apărută neașteptat" x_* și media aritmetică $\bar{x}$ a rezultatelor rămase luate în valoare absolută, $|x_* - \bar{x}|$, se împarte la abaterea standard empirică și se obține raportul

$$t = |x_* - \bar{x}|/s, \qquad (1.13)$$

raport care se compară cu valorile critice $t_n(\mathscr{P})$ din tabelul III (Anexă, pag. 196). Dacă pentru un număr dat de observații n raportul (1.13) se află între două valori critice cu siguranțele $\mathscr{P}_1$ și $\mathscr{P}_2$ ($\mathscr{P}_2 > \mathscr{P}_1$), atunci cu o siguranță a concluziei mai mare decît $\mathscr{P}_1$ se poate considera că valoarea „apărută neașteptat" conține o eroare grosolană și o vom elimina din prelucrarea ulterioară.

Remarcăm că dacă siguranța concluziei se dovedește insuficientă, aceasta nu dovedește absența unei erori

grosolane, ci numai faptul că nu avem suficiente motive ca să excludem valoarea „apărută neașteptat".

Exemplu. Considerăm rezultatele a n măsurări independente de egală precizie, pentru care media aritmetică este $\bar{x} = 6{,}500$, iar abaterea standard empirică $s = 0{,}133$ și fie cea de a $(n+1)$-a măsurare care a condus la rezultatul $x_* = 6{,}866$. Se poate elimina rezultatul acesta din prelucrările ulterioare?

Soluție. În acest caz raportul (1.13) este egal cu

$$t = 0{,}366/0{,}133 \approx 2{,}75.$$

Dacă numărul de rezultate acceptate este $n = 40$, atunci raportul obținut depășește valoarea critică 2,742 pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și valoarea x_* se poate elimina cu o siguranță a concluziei mai mare decît 0,99. Dacă numărul rezultatelor acceptate este $n = 6$, atunci raportul obținut este mai mic decît valoarea critică 2,78 chiar pentru o siguranță $\mathscr{P} = 0{,}95$, deci valoarea x_* nu se exclude.

CAPITOLUL 2

VALORI MEDII ȘI ESTIMAȚIILE LOR. VERIFICAREA IPOTEZELOR

2.1. Valori medii, metode de calcul

2.1.1. *Formule de bază*

Se numește *medie aritmetică* sau, simplu, *medie* a valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valoarea

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (2.1)$$

Abaterea medie pătratică a valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la valoarea lor medie $\bar{x}$ este definită astfel :

$$s^* = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \qquad (2.2)$$

Pentru a calcula abaterea medie pătratică față de un număr arbitrar c, se utilizează formula

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + (\bar{x}-c)^2.$$

Dacă printre rezultatele măsurărilor se întîlnesc valori egale, atunci termenii corespunzători în relațiile (2.1)

și (2.2) se pot unifica. Așa de exemplu, dacă rezultatul x_1 apare de m_1 ori, rezultatul x_2 apare de m_2 ori, ..., rezultatul x_k de m_k ori, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, atunci formulele (2.1) și (2.2) se pot pune sub forma

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i, \tag{2.3}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2}. \tag{2.4}$$

Media ponderată se definește cu ajutorul relației

$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}, \tag{2.5}$$

iar *abaterea medie pătratică ponderată* cu relația

$$s^* = \sqrt{\frac{p_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + p_k(x_k - \bar{x})^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k}} = \sqrt{\frac{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum p_i}}, \tag{2.6}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt ponderile măsurărilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ respectiv. Media ponderată se folosește în cazul prelucrării rezultatelor măsurărilor de precizii diferite (vezi 2.2.2 și 2.2.4).

2.1.2. *Calculul mediilor*

Calculul valorilor medii se simplifică considerabil, dacă se iau valorile x_i începînd cu o origine de calcul aleasă convenabil și într-o scară convenabilă. Practic aceasta conduce la transformarea liniară

$$x_i = c + h u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{2.7}$$

Cu ajutorul transformării (2.7) formulele de calcul devin

$$\bar{x} = c + h\bar{u}, \quad \text{cu} \quad \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i, \tag{2.8}$$

și

$$s^* = h\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (u_i - \bar{u})^2} = h\sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \tag{2.9}$$

unde

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2.$$

Pentru controlul calculelor, se repetă toate calculele cu o altă origine de calcul c_1 : rezultatele trebuie să coincidă cu o precizie pînă la erorile datorate rotunjirilor.

Exemplu. În tabelul 2.1 primele două coloane ne dau rezultatele a zece măsurări ale unei anumite variabile ($\bar{x}$ reprezintă rezultatele măsurărilor, iar m numărul rezultatelor corespunzătoare). Alegînd drept origine de calcul $c = 36{,}0$ și punînd $h = 0{,}1$, se calculează valorile

$$u_i = \frac{x_i - c}{h} = \frac{x_i - 36{,}0}{0{,}1}$$

din cea de-a treia coloană. Suma numerelor din coloanele a patra și a cincea ne dau toate datele necesare calculării lui $\bar{x}$ și s^*. În ultimele trei coloane sînt trecute toate datele de control corespunzătoare unei alte origini de calcul $c_1 = 36{,}1$ ce corespunde transformării $u = v + 1$.

Tabelul 2.1

Date inițiale		Calcul			Control		
x	m	u	mu	mu^2	v	mv	mv^2
35,6	1	−4	−4	16	−5	−5	25
35,9	3	−1	−3	3	−2	−6	12
36,1	3	1	3	3	0	0	0
36,2	2	2	4	8	1	2	2
36,6	1	6	6	36	5	5	25
Sumă	10	—	6	66	—	−4	64

Cu ajutorul sumelor obținute se calculează mediile:

$$\bar{u} = \frac{6}{10} = 0{,}6, \quad \bar{x} = 36{,}0 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 36{,}06,$$

$$s^* = 0{,}1 \sqrt{\frac{66}{10} - (0{,}6)^2} = 0{,}1 \sqrt{6{,}24} = 0{,}25.$$

Controlul calculelor ne conduce la aceleași rezultate:

$$\bar{v} = \frac{-4}{10} = -0{,}4, \quad \bar{x} = 36{,}1 + 0{,}1\ (-0{,}4) = 36{,}06,$$

$$s^* = 0{,}1 \sqrt{\frac{64}{10} - (-0{,}4)^2} = 0{,}1 \sqrt{6{,}24} = 0{,}25.$$

În afara mediilor aritmetice și abaterilor medii pătratice, în anumite calcule sînt necesare și *momentele centrate de ordinul trei și patru*, definite de relațiile

$$M_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^3, \quad M_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^4.$$

Calculul acestor medii se face prin aceleași metode pe care le-am expus mai înainte. În tabelul de calcul se adaugă coloanele corespunzătoare produselor $m_i u_i^3$ și $m_i u_i^4$, se calculează $\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3$ și $\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^4$, după care se calculează momentele respective cu ajutorul formulelor

$$M_3 = h^3 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3 - 3\,\overline{u^2}\,\bar{u} + 2(\bar{u})^3 \right],$$

$$M_4 = h^4 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^4 - 4 \frac{\bar{u}}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3 + 6\overline{u^2}\,(\bar{u})^2 - 3(\bar{u})^4 \right].$$

2.1.3. *Calculul mediilor pentru serii de date grupate pe intervale*

Metoda de calcul prezentată în 2.1.2 este deosebit de utilă pentru calculul mediilor în cazul în care toate datele se grupează pe intervale de aceeași lungime (*serii de date*

grupate pe intervale). În acest caz prin x_i se notează mijloacele intervalelor, iar drept origine de calcul c se alege mijlocul intervalului median (sau a unuia dintre cele două intervale mediane), iar ca h se ia lungimea intervalului. În acest caz u_i sînt numerele de ordine ale intervalelor considerate de la intervalul median ales, după cum se vede imediat din exemplul care urmează.

Exemplu. În tabelul 2.2 se dau calculele pentru valoarea medie și abaterea medie pătratică pentru o serie de date grupate pe intervale. Aici lungimea intervalului este $h = 0{,}050$. Alegînd originea de calcul $c = 8{,}600$, obținem

$$u = \frac{x - 8{,}600}{0{,}050}, \quad \bar{u} = \frac{60}{100} = 0{,}6, \quad \bar{x} = 8{,}600 + 0{,}050 \cdot 0{,}6 = 8{,}630,$$

$$s^* = 0{,}050 \sqrt{6{,}94 - (0{,}6)^2} = 0{,}050 \sqrt{6{,}58} = 0{,}128.$$

Pentru originea de calcul de control $c_1 = 8{,}650$ avem

$$v = \frac{x - 8{,}650}{0{,}050}, \quad \bar{v} = \frac{-40}{100} = -0{,}4, \quad \bar{x} = 8{,}650 + 0{,}050\ (-0{,}4) = 8{,}630,$$

$$s^* = 0{,}050 \sqrt{6{,}74 - (-0{,}4)^2} = 0{,}050 \sqrt{6{,}58} = 0{,}128,$$

ceea ce dovedește absența erorilor în calculele efectuate.

Tabelul 2.2

Intervale	x	m	u	mu	mu^2	v	md	mv^2
8,275—8,325	8,30	1	−6	−6	36	−7	−7	49
8,325—8,375	8,35	2	−5	−10	50	−6	−12	72
8,375—8,425	8,40	4	−4	−16	64	−5	−20	100
8,425—8,475	8,45	5	−3	−15	45	−4	−20	80
8,475—8,525	8,50	8	−2	−16	32	−3	−24	72
8,525—8,575	8,55	10	−1	−10	10	−2	−20	40
8,575—8,625	8,60	18	0	0	0	−1	−18	18
8,625—8,675	8,65	17	1	17	17	0	0	0
8,675—8,725	8,70	12	2	24	48	1	12	12
8,725—8,775	8,75	9	3	27	81	2	18	36
8,775—8,825	8,80	7	4	28	112	3	21	63
8,825—8,875	8,85	6	5	30	150	4	24	96
8,875—8,925	8,90	0	6	0	0	5	0	0
8,925—8,975	8,95	1	7	7	49	6	6	36
Sumă		100	—	60	694	—	−40	674

2.1.4. *Medii teoretice (momente ale repartiției)*

În modelul probabilistic teoretic, fiecare dintre rezultatele măsurărilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ apare ca valoare a unei anumite variabile aleatoare X. Într-o astfel de interpretare, valorile medii (2.1) și (2.3) apar ca valori aproximative ale mediei teoretice — valoarea medie a variabilei aleatoare X. *Valoarea medie a variabilei aleatoare* X, notată MX, se definește cu ajutorul relației *

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx, \tag{2.10}$$

unde $p(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei aleatoare X (vezi 1.2.1).

Valoarea medie a unei funcții $f(X)$ de variabilă aleatoare X se definește cu ajutorul relației

$$Mf(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Se numește *moment de ordinul* k al lui X valoarea medie a variabilei aleatoare X^k:

$$\alpha_k = MX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, p(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Momentul de ordinul întîi α_1 nu este altceva decît valoarea medie a variabilei aleatoare X; el se mai numește *centrul repartiției* variabilei aleatoare X. În cazul repartiției normale (1.2) centrul repartiției este egal cu zero, iar în cazul repartiției normale generale (1.8) centrul repartiției este $\alpha_1 = a$.

Diferența $X - \alpha_1$ (abaterea variabilei aleatoare de la centrul ei) poartă numele de *variabilă aleatoare centrată.*

* Toate integralele improprii considerate aici se presupun absolut convergente.

Momentul centrat de ordinul k este prin definiție valoarea medie a variabilei aleatoare $(X - \alpha_1)^k$, adică a abaterii lui X de la centru, ridicate la puterea k:

$$\mu_k = M(X - \alpha_1)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^k\, p(x)\, dx. \tag{2.13}$$

Momentul centrat de ordinul unu este totdeauna egal cu zero: $\mu_1 = 0$.

Momentul centrat de ordinul doi se numește *dispersie* a variabilei aleatoare X și se notează prin

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2\, p(x)\, dx. \tag{2.14}$$

În cazul repartițiilor normale (1.2) sau (1.8) dispersia este egală cu σ^2. Rădăcina pătrată din dispersie se numește *abatere medie pătratică* a variabilei aleatoare X (de la centrul ei) și se notează prin $\sigma(X)$. Dispersia și abaterea medie pătratică ale variabilei aleatoare X se folosesc pentru a caracteriza împrăștierea valorilor lui X.

Momentele centrate și momentele obișnuite sînt legate prin relațiile:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \qquad \alpha_2 = \mu_2 + \alpha_1^2,$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \qquad \alpha_3 = \mu_3 + 3\mu_2\alpha_1 + \alpha_1^3,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4, \qquad \alpha_4 = \mu_4 + 4\mu_3\alpha_1 + 6\mu_2\alpha_1^2 + \alpha_1^4$$

ș.a.m.d.

Dacă se consideră n variabile aleatoare independente (de exemplu rezultatele a n măsurări independente) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cu densitățile de repartiție $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)$, atunci valoarea medie a funcției $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se definește prin relația

$$Mf(X_1, \ldots, X_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\; p_1(x_1) \ldots p_n(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Valoarea medie se bucură de proprietatea de liniaritate :

$$M\sum_{i=1}^{n} C_i X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i M X_i \quad (C_i = \text{const}).$$

O proprietate de liniaritate analoagă este valabilă și pentru media aritmetică.

2.2. Estimații ale adevăratei valori a unei mărimi măsurate

2.2.1. *Tipuri de estimații, proprietăți*

Să considerăm datele rezultate din n măsurări independente asupra unei anumite mărimi. Se presupune că rezultatele măsurărilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nu au erori grosolane și sistematice (adică rezultatele neconforme cu realitatea au fost eliminate iar asupra erorilor sistematice au fost făcute corecțiile corespunzătoare). A estima adevărata valoare a a mărimii măsurate înseamnă :

a) să se determine o funcție $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de rezultatele măsurărilor care să ne dea o valoare suficient de apropiată de valoarea a (o astfel de funcție se numește *estimație punctuală* sau, simplu, *estimație* a valorii a);

b) să se determine un interval $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$ care cu o probabilitate dată $\mathscr{P}$ să acopere adevărata valoare a (o astfel de estimație o vom numi *estimație de încredere*, probabilitatea $\mathscr{P}$ o vom numi *nivel de încredere* sau *siguranță* a estimației, intervalul $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$ îl vom numi *interval de încredere*, iar extremitățile lui — *limite de încredere*).

Pentru ca estimația $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să asigure o aproximație suficient de bună a valorii adevărate a, ea trebuie (dacă este posibil) să posede următoarele proprietăți :

1. *Nedeplasare.* Estimația se numește *nedeplasată*, dacă valoarea medie teoretică a ei coincide cu valoarea a: $Mg = a$.

2. *Consistență.* O estimație se numește *consistentă*, dacă ea tinde în probabilitate către valoarea a, atunci cînd numărul n al măsurărilor crește necontenit $\left(\text{simbolic acest lucru se scrie } g \xrightarrow[n\to\infty]{P} a\right)$. Aceasta înseamnă că pentru $n \to \infty$ și orice $\varepsilon > 0$ fixat, probabilitatea $P(|g - a| < \varepsilon)$ tinde către 1, adică, exprimat în cuvinte, ca abaterea estimației g de la valoarea a să fie mai mică decît ε este practic un eveniment sigur.

3. *Eficiență.* Estimația nedeplasată se numește *eficientă*, dacă ea are cea mai mică împrăștiere dintre toate estimațiile nedeplasate ale valorii a pe baza rezultatelor măsurărilor.

2.2.2. *Estimații punctuale*

Dacă toate cele n măsurări asupra mărimii a au fost efectuate cu aceeași precizie (*măsurări de egală precizie*), atunci drept estimație a adevăratei valori a a mărimii măsurate se ia media aritmetică a valorilor rezultatelor măsurărilor :

$$a \approx \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (2.15)$$

Această estimație este nedeplasată și consistentă. Dacă în plus presupunem că erorile aleatoare de măsurare se supun unei legi de repartiție normale, atunci această estimație este și eficientă.

Dacă măsurările nu sînt de egală precizie dar se cunosc *ponderile măsurărilor*, adică numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ invers proporționale cu dispersiile erorilor $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_n^2},$$

atunci drept estimație a adevăratei valori a a mărimii măsurate se ia media aritmetică ponderată

$$a \approx \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}. \qquad (2.16)$$

Această estimație are aceleași proprietăți ca și estimația (2.15).

Este util să atragem atenția asupra faptului că media aritmetică ponderată (2.16) depinde nu de ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ efectiv, ci de rapoartele acestora. De exemplu, adesea valorile supuse prelucrării $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nu sînt rezultatele măsurărilor directe, ci mediile a n serii de date, obținute prin măsurări efectuate cu aceeași precizie (adică cu aceeași eroare medie pătratică σ), însă cu un număr diferit de date de la o serie la alta. În acest caz fiecărei valori x_i i se poate atașa drept pondere numărul de măsurări în seria corespunzătoare:

$$p_i = m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde m_i este numărul de măsurări în seria cu valoarea medie x_i. Această situație o legăm acum de faptul că în condițiile de mai sus dispersiile σ_i^2 ale valorilor medii x_i sînt invers proporționale cu numărul de măsurări m_i din seriile respective:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2/m_i$$

și deci

$$\frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_n^2} = m_1 : m_2 : \ldots : m_n.$$

Media aritmetică pentru o serie de date dintr-un interval (pag. 24) este o estimație deplasată a lui a. Mărimea deplasării este de ordinul lui h^2, dacă lungimea intervalului h este suficient de mică (de două-trei ori mai mică decît σ).

2.2.3. *Estimări prin intervale de încredere pentru măsurări de egală precizie*

În ceea ce urmează, estimațiile de încredere pentru adevărata valoare a a mărimii măsurate se dau în ipoteza că erorile aleatoare de măsurare se supun unei repartiții normale (vezi 1.2.2). Aici se consideră numai estimații de încredere simetrice care au forma de inegalități

$$x - \varepsilon < a < x + \varepsilon$$

sau

$$|a - \bar{x}| < \varepsilon, \tag{2.17}$$

unde $\bar{x}$ este media aritmetică (2.15).

Mărimea ε se determină fixîndu-se nivelul de încredere (siguranța estimației) $\mathscr{P}$; adesea siguranța $\mathscr{P}$ se fixează la unul din nivelele 0,95; 0,99; 0,999.

Estimarea cu ajutorul intervalului de încredere în cazul cînd se cunoaște precizia măsurărilor. Dacă se cunoaște eroarea medie pătratică σ (sau o altă caracteristică a preciziei măsurărilor legată de aceasta), atunci intervalul de încredere (2.17) este de forma

$$|a - \bar{x}| < t(\mathscr{P})\sigma/\sqrt{n}, \tag{2.18}$$

unde n este numărul de măsurări, iar valoarea $t = t(\mathscr{P})$ se determină, fixîndu-se nivelul de încredere $\mathscr{P}$, cu ajutorul relației

$$2\Phi(t) = \mathscr{P}, \tag{2.19}$$

adică se găsește în tabelul II (Anexă, pag. 195).

În acest mod, se obține

$$\varepsilon = t(\mathscr{P})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Exemplul 1. Presupunem că pentru cele zece măsurări ale căror rezultate sînt date în exemplul din 2.1.2 (pag. 23) se cunoaște $\sigma = 0{,}28$; se cere să se estimeze adevărata valoare a mărimii măsurate a cu o siguranță de $\mathscr{P} = 0{,}99$.

Soluție. Din tabelul II, pentru $\mathscr{P} = 2\Phi(t) = 0{,}99$, adică pentru $1 - \mathscr{P} = 0{,}01$ găsim $t = 2{,}576$. Media aritmetică a rezultatelor calculată la pag. 24 este egală cu $\bar{x} = 36{,}06$. Prin urmare, cu o siguranță de 0,99 se poate considera

$$|a - \bar{x}| = |a - 36{,}06| < 2{,}576 \cdot \frac{0{,}28}{\sqrt{10}} = 0{,}23,$$

adică intervalul (35,83; 36,29) acoperă valoarea a.

Estimarea cu ajutorul intervalului de încredere în cazul cînd nu se cunoaște precizia măsurărilor. Dacă eroarea

medie pătratică σ nu se cunoaște dinainte, atunci se utilizează în locul ei abaterea standard empirică

$$s = s^* \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \qquad (2.20)$$

care este o estimație a parametrului σ (vezi 2.4.1). În acest caz intervalul de încredere (2.17) capătă forma

$$|a - \bar{x}| < t(\mathscr{P}; k) \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (2.21)$$

sau

$$|a - \bar{x}| < t(\mathscr{P}; k) \frac{s^*}{\sqrt{k}} \quad (k = n - 1),$$

unde factorul $t(\mathscr{P}; k)$ depinde nu numai de nivelul de încredere $\mathscr{P}$, ci și de numărul n al măsurărilor ($k = n-1$). Valorile acestui factor sînt date în tabelul IV (Anexă, pag. 197) pentru valori diferite ale nivelului de încredere $\mathscr{P}$ și pentru diferite valori ale lui $k>4$. Tabelul IV este alcătuit cu ajutorul *funcției de repartiție a lui Student*, adică funcția de repartiție a raportului $(\bar{x}-a)\sqrt{n}/s$; valoarea lui $t(\mathscr{P}; k)$ se determină astfel încît

$$P\left(\left| \frac{\bar{x} - a}{s/\sqrt{n}} \right| < t \right) = \mathscr{P}.$$

Funcția de repartiție a lui Student depinde de parametrul k, care poartă numele de *număr de grade de libertate*; în cazul problemei considerate numărul de grade de libertate k este legat de numărul n al măsurărilor prin relația $k=n-1$.

Exemplul 2. Considerăm din nou cele zece măsurări, ale căror rezultate sînt date în exemplul din 2.1.2 (pag. 23), unde valoarea parametrului σ este necunoscută. Se cere să se estimeze adevărata valoare a mărimii măsurate a cu o siguranță $\mathscr{P} = 0{,}99$.

Soluție. Pe baza rezultatelor măsurărilor s-a calculat la pag. 24 media aritmetică și abaterea medie pătratică și s-a obținut respectiv $\bar{x} = 36{,}06$ și $s^* = 0{,}25$. Pentru nivelul de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ și numărul

măsurărilor $n = 10$ se determină din tabelul IV factorul $t(0{,}99; 9) = 3{,}2$
și astfel se obține intervalul de încredere pentru estimarea valorii adevăra
a sub forma

3.250
adevarate

$$|a - \bar{x}| = |a - 36{,}06| < 3{,}250 \frac{0{,}25}{\sqrt{9}} = 0{,}27.$$

În felul acesta cu o siguranță de 0,99 se poate considera că interval
(35,79; 36,33) acoperă valoarea a. intervalul

NU Subliniem faptul că intervalul de încredere (2.21) n
NU se poate înlocui cu intervalul (2.18) prin simpla substitui
a abaterii standard σ cu abaterea standard empirică s,
ceea ce revine la înlocuirea factorului $t(\mathscr{P})$ din tabelu II
cu factorul $t(\mathscr{P}; k)$. Așa de exemplu, pentru nivelul de
încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ valoarea $t(0{,}99) = 2{,}576$, în timp c
pentru zece rezultate $t(0{,}99; 9) = 3{,}250$. Prin urmare
dacă precizia măsurărilor este necunoscută, intervalu
de încredere este semnificativ mai mare decît cel obținu
în cazul cînd se cunoaște precizia măsurărilor. Valoare
factorului $t(\mathscr{P}; k)$ descrește cînd numărul gradelor d
libertate k crește indefinit ($k \to \infty$) și tinde către valoare
factorului $t(\mathscr{P})$, ceea ce se poate vedea comparînd ultim
coloană a tabelului IV cu coloana corespunzătoare
tabelului II.

Regula trei sigma. Cum alegerea siguranțe
estimației admite un anumit grad de arbitrar, în practic
prelucrării datelor experimentale a căpătat o largă răs
pîndire regula trei sigma:

*Abaterea adevăratei valori a mărimii măsurate de l
media aritmetică a rezultatelor măsurărilor nu depășește c
de trei ori abaterea medie pătratică a erorii acestei valor
medii.*

În acest fel regula trei sigma ne conduce la intervalu
de încredere

$$|a - \bar{x}| < 3\sigma/\sqrt{n}, \qquad (2.22$$

dacă se cunoaște mărimea parametrului σ, sau la inter
valul de încredere

$$|a - \bar{x}| < 3s/\sqrt{n}, \qquad (2.23$$

măsurărilor $n = 10$ se determină din tabelul IV factorul $t(0{,}99\ ;\ 9) = 3{,}250$ și astfel se obține intervalul de încredere pentru estimarea valorii adevărate a sub forma

$$|a - \overline{x}| = |a - 36{,}06| < 3{,}250 \frac{0{,}25}{\sqrt{9}} = 0{,}27\,.$$

În felul acesta cu o siguranță de 0,99 se poate considera că intervalul (35,79 ; 36,33) acoperă valoarea a.

Subliniem faptul că intervalul de încredere (2.21) nu se poate înlocui cu intervalul (2.18) prin simpla substituire a abaterii standard σ cu abaterea standard empirică s, ceea ce revine la înlocuirea factorului $t(\mathscr{P})$ din tabelul II cu factorul $t(\mathscr{P}\ ;\ k)$. Așa de exemplu, pentru nivelul de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ valoarea $t\,(0{,}99) = 2{,}576$, în timp ce pentru zece rezultate $t(0{,}99\ ;\ 9) = 3{,}250$. Prin urmare, dacă precizia măsurărilor este necunoscută, intervalul de încredere este semnificativ mai mare decît cel obținut în cazul cînd se cunoaște precizia măsurărilor. Valoarea factorului $t(\mathscr{P}\ ;\ k)$ descrește cînd numărul gradelor de libertate k crește indefinit ($k \to \infty$) și tinde către valoarea factorului $t(\mathscr{P})$, ceea ce se poate vedea comparînd ultima coloană a tabelului IV cu coloana corespunzătoare a tabelului II.

Regula trei sigma. Cum alegerea siguranței estimației admite un anumit grad de arbitrar, în practica prelucrării datelor experimentale a căpătat o largă răspîndire regula trei sigma :

Abaterea adevăratei valori a mărimii măsurate de la media aritmetică a rezultatelor măsurărilor nu depășește cu de trei ori abaterea medie pătratică a erorii acestei valori medii.

În acest fel regula trei sigma ne conduce la intervalul de încredere

$$|a - \bar{x}| < 3\sigma/\sqrt{n}\,, \qquad (2.22)$$

dacă se cunoaște mărimea parametrului σ, sau la intervalul de încredere

$$|a - \bar{x}| < 3s/\sqrt{n}\,, \qquad (2.23)$$

dacă σ este necunoscut. Prima dintre aceste estimații (2.22) are siguranța

$$2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1 - 0{,}003,$$

independent de numărul măsurărilor. Siguranța celei de-a doua dintre estimații (2.23) depinde esențial de numărul n al măsurărilor. Dependența siguranței $\mathscr{P}$ de numărul n al măsurărilor pentru estimația (2.23) este dată de tabelul 2.3.

Tabelul 2.3

n	$\mathscr{P}$	n	$\mathscr{P}$	n	$\mathscr{P}$
5	0,960	12	0,988	25	0,994
6	0,970	14	0,990	30	0,995
7	0,976	16	0,991	50	0,996
8	0,980	18	0,992	150	0,997
9	0,983	20	0,993	∞	0,9973
10	0,985				

Cazul unei serii de date grupate pe intervale. În cazul în care se cunoaște abaterea medie pătratică σ, estimația (2.18) se poate aplica și la serii de date grupate pe intervale (dacă lungimea h a intervalului este suficient de mică). Estimația de forma (2.21) nu mai este valabilă.

De obicei, pentru seria de date grupate, cu σ necunoscut, se aplică regula trei sigma cu abaterea standard empirică corectată

$$s = \sqrt{s^{*2} - h^2/12}$$

(vezi 2.4.1). Totuși, siguranța unei astfel de estimații se poate considera acceptabilă ($>0{,}99$) numai pentru un număr de măsurări suficient de mare (de ordinul unei sute sau mai mare) și pentru lungimea h a intervalului suficient de mică (cel puțin de două-trei ori mai mică decît s^*).

Exemplul 3. Pentru o sută de măsurări ale căror rezultate sînt date în exemplul de la 2.1.3 (pag. 25) s-au calculat valorile $\bar{x} = 8{,}63$ și $s^* = 0{,}128$, iar lungimea intervalului $h = 0{,}05$. Se cere să se estimeze adevărata valoare a a mărimii măsurate după regula trei sigma.

Soluție. Calculăm mai întîi abaterea standard empirică corectată

$$s = 0{,}05\sqrt{6{,}58 - 1/12} = 0{,}05\sqrt{6{,}50} = 0{,}127,$$

apoi aplicăm regula trei sigma:

$$|a - \bar{x}| = |a - 8{,}63| < 3 \cdot 0{,}127/\sqrt{100} = 0{,}038.$$

Se poate considera că intervalul (8,592; 8,668) acoperă valoarea a.

2.2.4. *Estimări prin intervale de încredere în cazul măsurărilor de precizii diferite*

Ca și mai înainte se presupune și aici că fiecare rezultat obținut în urma unor măsurări conține numai o eroare aleatoare care se supune unei legi de repartiție normale.

Dacă rezultatele măsurărilor de inegală precizie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pot fi considerate ca medii ale unor serii de măsurări de egală precizie, precizia măsurărilor în fiecare serie fiind aceeași iar numărul de măsurări în fiecare serie este cunoscut ($m_1, m_2, \ldots, m_n$), atunci intervalul de încredere a valorii adevărate a a mărimii măsurate este de forma

$$|a - \bar{x}| < t(\mathscr{P}; k)\frac{s}{\sqrt{N}}, \qquad (2.24)$$

unde

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad N = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x})^2}$$

(abaterea standard), $k = n-1$ (numărul de grade de libertate), $\mathscr{P}$ este nivelul de încredere; valorile factorului $t(\mathscr{P}; k)$ se iau din tabelul IV (Anexă, pag. 197).

Dacă în plus se cunoaște pentru fiecare serie abaterea medie pătratică de la media seriei $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$, atunci are loc o estimație mai bună, de același tip cu (2.24), însă cu abaterea standard empirică

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-n}\sum_{i=1}^{n} m_i s_i^{*2}}$$

și numărul de grade de libertate $k = N - n$. Precizia ridicată a estimației se obține aici ca urmare a numărului mare de grade de libertate ($N - n > n - 1$) care intră la numitorul formulei ce ne dă abaterea standard empirică și în factorul $t(\mathscr{P}; k)$.

Dacă pentru rezultatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de inegală precizie se cunosc valorile exacte ale ponderilor sau raportele acestor valori

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_n^2},$$

unde σ_i^2 este dispersia valorii x_i, atunci intervalul de încredere pentru adevărata valoare a a mărimii măsurate este de forma

$$|a - \bar{x}| < t(\mathscr{P}; k) \cdot s_{\bar{x}}, \tag{2.25}$$

unde

$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \quad p = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x})^2}{p(n-1)}}, \tag{2.26}$$

$k = n-1$ (numărul de grade de libertate), iar $\mathscr{P}$ este nivelul de încredere ; valorile factorului $t(\mathscr{P}; k)$ se iau din tabelul IV (Anexă, pag. 197).

Aceeași formă o are intervalul de încredere și în cazul în care fiecare dintre valorile x_i reprezintă media valorilor unei serii de date de egală precizie, cu dispersia σ_i^2 și cu ponderea $p_i = \frac{m_i}{\sigma_i^2}$, unde m_i reprezintă numărul de măsurări din cea de a i-a serie.

Uneori însă ponderile exacte ale măsurărilor (sau raportele lor) sînt necunoscute și atunci ele se înlocuiesc cu valorile aproximative rezultate din experiment după formula

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{m_1}{s_1^2} : \frac{m_2}{s_2^2} : \ldots : \frac{m_n}{s_n^2},$$

unde

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - x_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

iar $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im_i}$ sînt rezultatele măsurărilor înregistrate în cea de a i-a serie cu valoarea medie x_i. În astfel de situații se obișnuiește să se ia drept estimație

$$|a - \bar{x}| < t s_{\bar{x}} \tag{2.27}$$

sau

$$|a - \bar{x}| < t/\sqrt{p}, \tag{2.28}$$

unde $s_{\bar{x}}$ și p au semnificațiile amintite mai înainte, iar factorul $t = t(\mathscr{P})$ se determină astfel încît să fie satisfăcută relația $2\Phi(t) = \mathscr{P}$, adică se ia din tabelul II (Anexă, pag. 195).

Ambele estimații (2.27) și (2.28) sînt aproximative și nu asigură nivelul de încredere calculat $\mathscr{P}$ decît dacă numărul măsurărilor este suficient de mare. Estimarea precrisă în acest caz este foarte laborioasă.

2.2.5. *Numărul necesar de măsurări*

Mărind numărul n de măsurări chiar în cazul cînd se păstrează neschimbată precizia, sau se poate mări siguranța intervalelor de încredere (2.18) și (2.21) sau se îngustează intervalul de încredere ale adevăratei valori a mărimii măsurate. Numărul de măsurări necesar pentru a atinge gradul de precizie necesar ε și nivelul de încredere $\mathscr{P}$ se poate stabili dinainte numai în cazul în care se cunoaște abaterea medie pătratică a măsurărilor (măsurările se presupun de egală precizie și independente). În acest caz numărul necesar de măsurări pentru obținerea unui interval de încredere de precizie ε :

$$|a - \bar{x}| < \varepsilon,$$

cu un nivel de încredere $\mathscr{P}$ dat, se determină din relația (2.18), de unde rezultă

$$n \geqslant \left[\frac{t(\mathscr{P})}{\varepsilon}\right]^2 \sigma^2,$$

iar $t = t(P)$ se determină din relația $2\Phi(t) = \mathscr{P}$ cu ajutorul tabelului II (Anexă, pag. 195).

Dacă abaterea medie pătratică a măsurărilor nu se cunoaște dinainte, însă se cunoaște cel puțin ordinul ei de mărime, atunci numărul necesar de măsurări se poate determina în funcție de nivelul de încredere $\mathscr{P}$ și de raportul $q = \frac{\varepsilon}{s}$, unde s este abaterea standard empirică. Pentru determinarea numărului n în funcție de $\mathscr{P}$ și q se folosește tabelul 2.4.

Tabelul 2.4

q \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

De exemplu, pentru a garanta obținerea unui interval de încredere cu siguranța $\mathscr{P} = 0{,}99$ și cu precizia pînă la $0{,}1\ s$ trebuie efectuate 668 de măsurări. În practică ne putem mărgini la un număr mai mic de măsurări, dacă se adoptă calea următoare. La început va trebui să efectuăm un număr restrîns de măsurări (de trei-patru ori mai mic decît cel indicat în tabel). Pe baza rezultatelor acestor măsurări se calculează intervalul de încredere. Apoi se precizează numărul necesar de măsurări astfel ca micșorarea intervalului de încredere de λ ori să asigure mărirea numărului de măsurări de λ^2 ori (de exemplu, micșorarea intervalului de încredere de două ori se asigură prin mărirea numărului de măsurări de patru ori).

Exemplu. Reluăm intervalul de încredere menționat la pag. 33 pentru estimarea adevăratei valori a a unei anumite mărimi pe baza a $n=10$ rezultate ale măsurărilor efectuate cu precizia 0,27 și cu nivelul de încredere 0,99. Dacă pentru același nivel de încredere dorim să estimăm valoarea a cu o precizie pînă la 0,1, ceea ce înseamnă că intervalul de încredere se micșorează de 2,7 ori, atunci va trebui să mărim numărul de măsurări pînă la $10 \cdot (2{,}7)^2 \approx 74$ (în realitate ceva mai mic, deoarece în acest caz și $t(0{,}99\,;\,k)$ descrește de la 3,25 la 2,65).

Subliniem faptul că efectul mai mare îl produce mărirea preciziei măsurărilor individuale.

2.3. Compararea valorilor medii

Scopul experimentului este adesea să se vadă dacă există o diferență semnificativă între valorile unui anumit parametru pentru două obiecte distincte cercetate. De exemplu, se dă un material nou (sau un nou aparat) și se constată că valoarea unuia dintre parametrii acestuia diferă de valoarea aceluiași parametru al materialului similar (sau aparatului) vechi, dar această diferență nu este suficient de concludentă; în această situație se naște problema suspiciunii dacă nu cumva această diferență se datorește doar erorilor aleatoare ale experimentului. O problemă analoagă apare în industrie, atunci cînd în condiții diferite (de exemplu la diferite utilaje sau diferite tehnologii) de fabricare a unui produs cu una și aceeași valoare nominală a unui anumit parametru se constată o divergență între valorile medii ale acestor parametri; aici este foarte important să știm dacă avem de-a face cu calități diferite ale produsului sau există numai o abatere întîmplătoare.

Pentru a lămuri problema dacă divergența valorilor unui anumit parametru x este întîmplătoare sau nu, se efectuează două serii de experimente și pentru fiecare serie de rezultate se calculează media artitmetică a parametrului, adică $\bar{x}_1$ și $\bar{x}_2$ respectiv. Problema care se pune acum este de a decide, cînd socotim că diferența între aceste medii este suficient de mare pentru ca, practic, să se poată afirma că deosebirile constatate în calitatea produselor nu sînt întmplătoare.

Soluția acestei probleme în termeni referitori la rezultatele măsurărilor se dă în cele ce urmează. Măsurările se presupun independente și, cel puțin în cadrul fiecărei serii, de egală precizie, iar funcția de repartiție a erorilor de măsurare se presupune a fi normală.

2.3.1. *Compararea mediilor cînd se cunosc dispersiile*

Presupunem că s-au efectuat n_1 măsurări independente de egală precizie într-o primă serie de măsurări și n_2 în cea de-a doua și că se cunosc dinainte dispersiile erorilor în prima și în cea de-a doua serie de măsurări (σ_1^2 și σ_2^2 respectiv). Notăm cu $\bar{x}_1$ și $\bar{x}_2$ respectiv mediile aritmetice ale rezultatelor din prima serie și a doua serie. Pentru a răspunde la problema dacă diferența dintre aceste medii aritmetice este întîmplătoare sau nu, vom calcula raportul

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}. \qquad (2.29)$$

Fixăm acum un nivel de încredere $\mathscr{P}$ și corespunzător determinăm din tabelul II (Anexă, pag. 195) valoarea lui $t = t(\mathscr{P})$ (de exemplu, pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ găsim $t = 2{,}576$). Dacă valoarea absolută a variabilei t determinată de relația (2.29) depășește valoarea $t(\mathscr{P})$ găsită în tabel, atunci diferența mediilor aritmetice se poate considera ca nefiind întîmplătoare (o diferență *semnificativă*) cu siguranța acestei concluzii egală cu $\mathscr{P}$. În caz contrar nu avem motive să considerăm că diferența este semnificativă (adică ca poate fi considerată ca o abatere întîmplătoare).

În practică se procedează uneori în modul următor. Se calculează raportul (2.29) și se determină din tabelul II cea mai apropiată valoare $t(\mathscr{P})$ *mai mică* decît valoarea raportului. De aici rezultă că existența unei diferențe semnificative dintre cele două medii aritmetice are siguranța $\mathscr{P}$. Dacă acest nivel de siguranță este satisfăcător, se acceptă ipoteza făcută, în caz contrar se respinge. Dacă siguranța concluziei formulate este nesatisfăcătoare și

se menține concluzia că diferența mediilor este semnificativă (neîntîmplătoare), atunci poate fi util să se mărească numărul de măsurări din fiecare serie pentru o mai mare siguranță a soluției problemei.

Dacă dispersiile ambelor serii de măsurări sînt aceleași $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, atunci raportul (2.29) devine

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}. \qquad (2.30)$$

Exemplu. Se consideră două serii de cîte 25 și 30 măsurări respectiv, cu abaterea medie pătratică $\sigma = 1{,}20$ și pentru care $\bar{x}_1 = 23{,}56$ iar $\bar{x}_2 = 22{,}80$. Comparîndu-se aceste medii, să se decidă dacă diferența lor este semnificativă.

Soluție. Se calculează raportul (2.30):

$$t = \frac{23{,}56 - 22{,}80}{1{,}20\sqrt{1/25 + 1/50}} = 2{,}59.$$

Din tabelul II (Anexă, pag. 195) găsim cea mai apropiată valoare, mai mică, a lui $t(0{,}99) = 2{,}576$. Rezultă cu o siguranță a concluziei de 0,99 că diferența între mediile respective este semnificativă.

2.3.2. *Compararea mediilor în cazul dispersiilor necunoscute*

Dacă nu se mai cunosc dinainte dispersiile erorilor, atunci compararea mediilor se face numai în ipoteza suplimentară că *dispersiile erorilor în ambele serii de experimente sînt aceleași* (această ipoteză sau se acceptă fără nici o verificare, de exemplu atunci cînd cele două serii de măsurări se efectuează cu același aparat sau se verifică această ipoteză așa cum se va arăta la punctul 2.5.2).

Să presupunem deci că se efectuează două serii de măsurări independente de aceeași precizie și că în prima serie s-au efectuat n_1 măsurări care au condus la media aritmetică $\bar{x}_1$ și dispersia empirică s_1^2 (vezi punctul 2.4.1), iar în a doua serie s-au efectuat n_2 măsurări care au condus la media aritmetică $\bar{x}_2$ și dispersia empirică s_2^2. Pentru a da răspuns la problema dacă între cele două medii există o diferență întîmplătoare sau neîntîmplătoare, se calculează raportul

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}, \qquad (2.31)$$

unde

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}\,. \qquad (2.32)$$

Mai departe, fixînd nivelul de încredere $\mathscr{P}$, cu ajutorul tabelului IV (Anexă, pag. 197) determinăm valoarea lui $t(\mathscr{P}; k)$ corespunzătoare nivelului de încredere dat $\mathscr{P}$ și numărului de grade de libertate $k = n_1 + n_2 - 2$. Dacă valoarea absolută a raportului (2.31) depășește valoarea găsită în tabel $t(\mathscr{P}; k)$ se poate considera că diferența valorilor medii este semnificativă (neîntîmplătoare) cu siguranța $\mathscr{P}$. În caz contrar nu avem motive să considerăm că diferența este semnificativă și o putem lua deci ca întîmplătoare.

Amintim faptul că dacă raportul (2.31) este numai cu puțin mai mic decît valoarea $t(\mathscr{P}; k)$ pentru un $\mathscr{P}$ dat, atunci se recomandă să se mărească numărul de măsurări pentru a obține o concluzie mai sigură [ținînd seama de faptul că valoarea lui $t(\mathscr{P}; k)$ descrește cînd k crește].

Mărimea s^2 determinată de relația (2.32) folosește drept estimație a dispersiei necunoscute σ^2 (punctul 2.4.1). Ea poate fi exprimată de asemenea prin abaterile medii pătratice de la valorile medii:

$$s_1^* = \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1}}\, s_1, \qquad s_2^* = \sqrt{\frac{n_2 - 1}{n_2}}\, s_2,$$

și anume

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\,(n_1 s_1^{*2} + n_2 s_2^{*2})\,. \qquad (2.33)$$

Exemplu. Considerăm două serii de măsurări de egală precizie de cîte 25 și 50 măsurări respectiv, cu mediile aritmetice $\bar{x}_1 = 23{,}56$ și $\bar{x}_2 = 22{,}80$ și cu abaterile medii pătratice de la aceste medii $s_1^* = 1{,}10$ și $s_2^* = 1{,}25$. Să se compare mediile aritmetice și să se spună, cu un nivel de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$, dacă diferența lor este semnificativă.

Soluție. Calculăm mai întîi

$$s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{73}(25 \cdot 1{,}10^2 + 50 \cdot 1{,}25^2)}\,\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{50}} = 0{,}298$$

și apoi raportul (2.31)

$$t = \frac{23{,}56 - 22{,}80}{0{,}298} = 2{,}55.$$

Din tabelul IV pentru nivelul de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ și numărul de grade de libertate $k = 25 + 50 - 2 = 73$ determinăm valoarea $(0{,}99; 73) = 2{,}65$. Cum valoarea calculată, a raportului este mai mică decît acest număr determinat din tabel, nu avem motive să considerăm că diferența între medii este semnificativă.

Pe de altă parte, din același tabel IV pentru nivelul de încredere 0,98 găsim valoarea $t\,(0{,}98; 73) = 2{,}38$, care este mai mică decît valoarea calculată a raportului t. Dacă ar putea fi satisfăcător un nivel de încredere 0,98, atunci am putea socoti diferența ca semnificativă. Dacă o astfel de siguranță nu ne satisface, atunci va trebui să mărim numărul de măsurări. De exemplu, dacă în prima serie mărim numărul de măsurări de la 25 la 28 și dacă pentru acest număr de măsurări se mențin valorile lui $\bar{x}_1$ și s_1^*, atunci obținem

$$s\sqrt{\frac{1}{28} + \frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{1}{76}(28 \cdot 1{,}10^2 + 50 \cdot 1{,}25^2)}\,\sqrt{0{,}05571} = 0{,}286,$$

$$t = \frac{23{,}56 - 22{,}80}{0{,}286} = 2{,}66,$$

ceea ce ne permite să tragem concluzia că există o diferență semnificativă între medii cu siguranța $\mathscr{P} = 0{,}99$, deoarece $t(0{,}99; 76) = 2{,}64$.

Observație. În tabelul IV nu există valori ale lui t pentru numărul de grade de libertate $k = 73$ și nici pentru $k = 76$. Valorile corespunzătoare au fost calculate făcîndu-se o interpolare liniară. Pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ găsim în tabel:

pentru $k = 70$ avem $t = 2{,}648$,
pentru $k = 80$ avem $t = 2{,}639$.

Cu ajutorul acestor valori calculăm:

pentru $k = 73$ valoarea $t = 2{,}648 - 0{,}3 \cdot 0{,}009 = 2{,}645$,
pentru $k = 76$ valoarea $t = 2{,}648 - 0{,}6 \cdot 0{,}009 = 2{,}643$.

2.3.3. *Verificarea ipotezei privind egalitatea valorilor medii*

Metodele de comparare a mediilor aritmetice expuse la punctele 2.3.1 și 2.3.2 se pot aplica la verificarea ipotezei asupra egalității mediilor. Această problemă se pune în modul următor. Presupunem că avem două mulțimi de elemente ce se deosebesc după un anumit indicator x.

Se consideră acceptat (sau verificat în prealabil) că repartiția indicatorului în ambele mulțimi este suficient de bine caracterizată de o repartiție normală cu aceeași dispersie σ^2 (care poate fi și necunoscută). Se verifică *ipoteza asupra coincidenței centrelor acestor repartiții normale* (care odată cu ipotezele deja acceptate înseamnă acum coincidență completă a repartițiilor). Ipoteza de verificat este numită de obicei *ipoteza nulă*. Pentru verificarea ei se iau selecții aleatoare (ca la loterie) din fiecare mulțime, formate dintr-un anumit număr de elemente alese la întîmplare.

Fie n_1 numărul elementelor (*volumul selecției*) extrase din prima mulțime și n_2 al celor din cea de-a doua. Se calculează mediile aritmetice corespunzătoare fiecăreia dintre selecții, $\bar{x}_1$ și $\bar{x}_2$. Dacă dispersia σ^2 este necunoscută, se calculează și dispersiile empirice s_1^2 și s_2^2 (vezi punctul 2.4.1).

Dacă ipoteza nulă este verificată, atunci rapoartele (2.30) și (2.31) sînt variabile aleatoare cu funcții de repartiție complet specificate. De aceea, fixîndu-se un nivel de încredere $\mathscr{P}$ (de exemplu 0,99), putem determina un interval simetric $(-t_\mathscr{P}; t_\mathscr{P})$ cu probabilitatea $\mathscr{P}$ ca valoarea raportului să cadă în acest interval. Cu alte cuvinte, dacă sînt îndeplinite toate condițiile de mai înainte și este adevărată ipoteza nulă, valoarea raportului (2.30) sau a raportului (2.31) poate cădea aleator în intervalul $(-t_\mathscr{P}; t_\mathscr{P})$ cu probabilitatea $\mathscr{P}$. Punctele situate în afara acestui interval formează *regiunea critică* (regiunea hașurată pe figura 2.1), probabilitatea căderii în această parte fiind egală cu $1-\mathscr{P}$. Valorile $t_\mathscr{P}=t(\mathscr{P})$ (în cazul în care se cunoaște dispersia) sau $t_\mathscr{P}=t(\mathscr{P}; k)$ (cînd nu se cunoaște dispersia) definesc extremitățile intervalului de încredere considerat și se numesc *valori critice*; aceste valori sînt date în tabelele II și IV (Anexă, pag. 195 și 197).

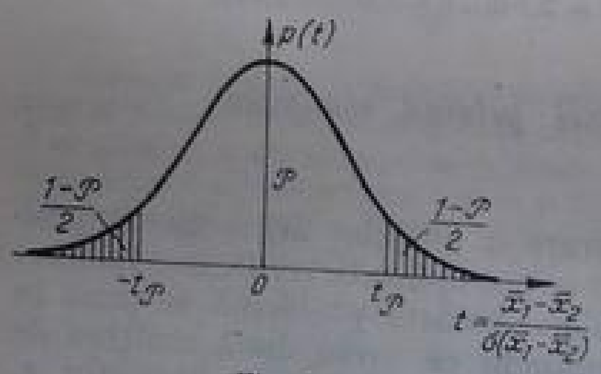

Fig. 2.1

Dacă valoarea raportului (2.30) sau a raportului (2.31) calculată pe baza valorilor caracteristicii în selecțiile făcute cade în regiunea critică (adică dacă valoarea absolută corespunzătoare raportului depășește valoarea critică determinată din tabelul II sau tabelul IV), ipoteza nulă *se respinge* cu siguranța (nivelul de încredere) $\mathscr{P}$, adică se consideră că rezultatele experimentului *contrazic* ipoteza nulă. În caz contrar ipoteza nulă *se acceptă*, adică se consideră că rezultatele experimentului *nu contrazic* ipoteza nulă (se înțelege însă că această concluzie nu poate folosi și la demonstrarea acestei ipoteze).

Subliniem faptul că am ales intervalul simetric $(-t_\mathscr{P}; t_\mathscr{P})$ și, prin urmare, regiunea critică simetrică, deoarece funcția de repartiție a valorilor rapoartelor (2.30) și (2.31) este simetrică față de origine. S-ar putea să se aleagă și regiuni critice nesimetrice, de exemplu în probleme unde ipoteza de verificat $a_1 = a_2$ are alternativa $a_1 > a_2$ (a_1 și a_2 sînt centrele corespunzătoare repartițiilor).

2.4. Estimarea preciziei măsurărilor

În continuare vom presupune peste tot că erorile de măsurare sînt aleatoare și repartizate normal (vezi 1.2). Drept indicator al preciziei măsurărilor (precizia aparatului) se va lua aici dispersia acestei legi σ^2 sau eroarea medie pătratică $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Măsurările se presupun independente și de egală precizie (cu aceeași dispersie).

2.4.1. *Estimarea punctuală a dispersiei*

A. Dacă se fac măsurări asupra unei mărimi cunoscute a (etalon), atunci drept estimație eficientă a dispersiei se ia media pătratelor abaterilor rezultatelor măsurărilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la valoarea a:

$$\sigma^2 \approx s_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2. \qquad (2.34)$$

B. Dacă se măsoară o mărime necunoscută, atunci drept estimație a dispersiei se ia *dispersia empirică*

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \qquad (2.35)$$

unde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ este media aritmetică a rezultatelor măsurărilor (vezi 2.2). Estimația (2.35) este nedeplasată și consistentă, însă nu este eficientă (ea este numai asimptotic eficientă, adică gradul de împrăștiere al ei tinde către valoarea minimă, cînd numărul măsurărilor crește indefinit).

C. Dacă cu același aparat se fac m serii de măsurări (în general de volume diferite), atunci drept estimație a dispersiei se ia media ponderată a dispersiilor empirice

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2+\ldots+(n_m-1)s_m^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_m-1)}, \qquad (2.36)$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_m$ reprezintă numărul de date în seriile respective, iar $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$ dispersiile empirice corespunzătoare.

Estimația (2.36) are aceleași proprietăți ca și estimația (2.35), însă practic permite utilizarea unei cantități mai mari de informație, ceea ce o face mai sigură (vezi punctul 2.4.2).

În cazul particular cînd numărul de măsurări este același în fiecare serie: $n_i = n$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, estimația (2.36) capătă forma

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^2, \qquad (2.37)$$

adică se ia drept estimație a dispersiei media aritmetică a valorilor dispersiilor empirice.

D. Dacă pentru m serii de măsurări asupra uneia și aceleiași mărimi se cunosc numărul de măsurări $n_1, n_2, \ldots$

$\ldots, n_m$ și mediile aritmetice ale rezultatelor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ din fiecare serie, atunci drept estimație a dispersiei se ia dispersia empirică a mediilor

$$\sigma^2 \approx \tilde{s}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2, \qquad (2.38)$$

unde $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i$, $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Această estimație este nedeplasată și consistentă (și de asemenea asimptotic eficientă cînd $m \to \infty$).

E. Pentru o serie de date grupate pe intervale (vezi punctul 2.1.3) mărimea dispersiei empirice s^{*2} este o estimație deplasată a dispersiei, iar deplasarea ei depinde de lungimea intervalului h. Dacă lungimea h a intervalului este suficient de mică (cel mult a zecea parte din întreaga amplitudine a rezultatelor măsurărilor), atunci se ia ca estimație a dispersiei *dispersia empirică corectată*

$$\sigma^2 \approx s^{*2} - h^2/12. \qquad (2.39)$$

Această corecție $-\frac{h^2}{12}$ (*corecția lui Sheppard*) înlătură în mare parte deplasarea, așa că estimația (2.39) se poate considera practic nedeplasată.

Exemplu. Pentru seria de date grupate pe intervale, considerată la pag. 25, s-a calculat $s^{*2} = 0{,}05^2 \cdot 6{,}58$. Ținînd seama de corecția lui Sheppard $-\frac{h^2}{12} = -0{,}05^2 \cdot \frac{1}{12} = -0{,}05^2 \cdot 0{,}08$, se obține valoarea dispersiei empirice corectate

$$\sigma^2 \approx s^{*2} - h^2/12 = 0{,}05^2 \cdot 6{,}50.$$

În toate cazurile menționate *abaterea standard empirică* $s = \sqrt{s^2}$ (eroarea medie pătratică empirică) ne dă o estimație *deplasată* (întrucîtva micșorată) a erorii medii pătratice σ. Deplasarea acestei estimații depinde de numărul n al măsurărilor și se micșorează cînd n crește (astfel, pentru $n = 16$ această deplasare reprezintă 2%, iar pentru $n = 26$ ea scade sub 1%).

2.4.2. *Intervale de estimație pentru eroarea medie pătratică*

Pentru un număr *mare* de date, estimația cu ajutorul unui interval de încredere a erorii medii pătratice σ se scrie sub forma unei estimații a abaterii relative a valorii estimate σ de la abaterea standard empirică s (sau s_*, S, $\tilde{s}$, vezi punctul 2.4.1). O astfel de estimație este de forma

$$|(\sigma - s)/s| < q$$

sau

$$s(1-q) < \sigma < s\ (1+q), \qquad (2.40)$$

unde valoarea coeficientului $q = q(\mathscr{P}; k)$ se găsește în tabelul V (Anexă, pag. 198) în funcție de nivelul de încredere $\mathscr{P}$ (*siguranța estimației*) și de *numărul de grade de libertate* k). Numărul de grade de libertate este egal cu numărul rezultatelor măsurărilor prelucrate, micșorat cu numărul relațiilor liniare între aceste date, adică el depinde nu numai de numărul de măsurări, ci și de forma abaterii standard empirice acceptate pentru estimația lui σ. În toate cazurile pe care le vom considera la punctul 2.4.1, numărul de grade de libertate se determină din tabelul 2.5. Aici

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

este numărul de măsurări efectuate în cazul C.

Tabelul 2.5

	A	B	C	D	E
Abaterea standard empirică	s_*	s	S	$\tilde{s}$	$\sqrt{s^{*2} - h^2/12}$
Numărul de grade de libertate k	n	$n-1$	$N-m$	$m-1$	$n-1$

Observație. Estimația cu ajutorul intervalelor de încredere în cazul E este cu totul aproximativă și se poate accepta numai pentru un număr suficient de mare n (nu mai mic de 50) și o lungime h a intervalului suficient de mică (nu mai mare decît $0{,}5\,s^*$).

Să mai observăm faptul că pentru un k suficient de mare se poate utiliza și regula trei sigma, care în cazul considerat este de forma

$$s\left(1 - \frac{3}{\sqrt{2k}}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{3}{\sqrt{2k}}\right),$$

iar siguranța unei astfel de estimații depășește

0,99 pentru $k > 47$,

0,992 pentru $k > 100$,

0,995 pentru $k > 200$.

Pentru un număr *mic* de date estimația simetrică de tipul (2.40) conduce la un interval de încredere nejustificat de mare în virtutea unei asimetrii pronunțate a repartiției abaterii standard empirice (vezi fig. 2.2). De aceea în cazul unui număr mic de măsurări se utilizează un interval de încredere asimetric de forma

$$sz_1 < \sigma < sz_2, \qquad (2.41)$$

unde valorile coeficienților $z_1 = z_1(\mathscr{P}; k)$ și $z_2 = z_2(\mathscr{P}; k)$ se găsesc în tabelul VI (Anexă, pag. 199) în funcție de nivelul $\mathscr{P}$ și de numărul de grade de libertate k. Coeficienții aceștia z_1 și z_2 se calculează astfel încît probabilitățile inegalităților

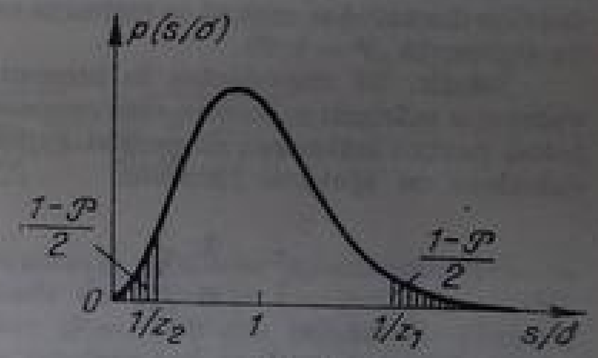

Fig. 2.2

$$\sigma < sz_1, \quad sz_2 < \sigma$$

să fie egale între ele (adică pentru un nivel de încredere fixat $\mathscr{P}$ probabilitatea fiecăreia dintre aceste două inegalități să fie egală cu $\frac{1-\mathscr{P}}{2}$).

O comparație între lungimile intervalelor de încredere date de estimațiile (2.40) și (2.41) o vom face pentru estimarea parametrului σ cu ajutorul unui interval de încredere cu nivelul de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ și numărul de grade de libertate $k = 18$. Din tabelul V pentru nivelul de încredere $\mathscr{P}$ și numărul de grade de libertate k date găsim $q = 0{,}602$, care dă intervalul de încredere de lungime

$$(1+q)\,s - (1-q)\,s = 2qs = 1{,}204\,s.$$

Din tabelul VI pentru aceleași valori $\mathscr{P}$ și k găsim $z_1 = 0{,}696$, $z_2 = 1{,}695$, care determină intervalul de încredere de lungime

$$z_2 s - z_1 s = 0{,}999\,s \text{ (cu 20\% mai mic!)}$$

Exemple

1. Să considerăm zece măsurări efectuate în scopul determinării preciziei măsurărilor și ale căror rezultate sînt date în tabelul 2.1. În același tabel s-au făcut și calculele pentru $\overline{x} = 36{,}06$ și $s^{*2} = (0{,}1)^2 \cdot 6{,}24$. Pe baza datelor din tabel se cere să se estimeze eroarea medie pătratică a măsurărilor cu siguranța $\mathscr{P} = 0{,}99$.

Soluție. Să considerăm la început cazul mai simplu cînd adevărata valoare a mărimii măsurate este cunoscută și egală cu $a = 36$. Atunci vom folosi pentru estimarea dispersiei expresia s_*^2, care va fi mai comod să se calculeze cu ajutorul formulei

$$s_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = s^{*2} + (\overline{x} - a)^2, \qquad (2.42)$$

relație care ne conduce la

$$s_*^2 = (0{,}1)^2 \cdot 6{,}24 + (0{,}06)^2 = (0{,}1)^2 \cdot 6{,}60.$$

De aici se obține egalitatea aproximativă

$$\sigma \approx s^* = 0{,}1 \cdot 2{,}57 = 0{,}257.$$

Pentru aprecierea acestei egalități aproximative cu nivelul de încredere 0,99 determinăm din tabelul VI (Anexă, pag. 199) pentru $k = 10$ coeficienții $z_1 = 0{,}630$ și $z_2 = 2{,}154$, care ne conduc la

$$0{,}257 \cdot 0{,}630 < \sigma < 0{,}257 \cdot 2{,}154,$$

adică am obținut intervalul de încredere (0,162 ; 0,554).

Dacă adevărata valoare a mărimii măsurate este necunoscută, estimarea dispersiei se va face cu ajutorul dispersiei empirice

$$\sigma^2 \approx s^2 = s^{*2}\frac{n}{n-1} = (0{,}1)^2 \cdot 6{,}24 \cdot \frac{10}{9} \approx (0{,}1)^2 \cdot 6{,}93.$$

De aici obținem egalitatea aproximativă $\sigma \approx s = 0{,}1 \cdot 2{,}64 = 0{,}263$. Pentru aprecierea acestei egalități aproximative cu nivelul de încredere 0,99 se folosește din nou tabelul VI, dar de data aceasta pentru numărul de grade de libertate $k = 9$. Cu acesta obținem $z_1 = 0{,}618$; $z_2 = 2{,}277$ și, prin urmare, intervalul de încredere

$$0{,}163 = 0{,}263 \cdot 0{,}618 < \sigma < 0{,}263 \cdot 2{,}277 = 0{,}599.$$

Remarcăm faptul că în acest caz eroarea cu care determinăm pe σ poate să atingă 128 %.

2. Se efectuează cu același aparat $m = 20$ serii de măsurări cu $n = 10$ măsurări în fiecare serie. Dispersia empirică a celei de a i-a serii de măsurări este s_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Se cere să se estimeze eroarea medie pătratică a aparatului de măsurat cu siguranța $\mathscr{P} = 0{,}99$.

Soluție. Cum numărul de măsurări în fiecare serie este același, vom utiliza estimația (2.37) pentru dispersie. De aici se obține egalitatea aproximativă

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^2} = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} s_i^2}.$$

Intervalul de încredere pentru această egalitate aproximativă se ia în acest caz pentru numărul de grade de libertate $k = mn - m = 180$. De aceea pentru nivelul de încredere $\mathscr{P} = 0{,}99$ din tabelul V (Anexă, pag. 198) obținem $q = 0{,}143$ (ceea ce conduce la o eroare relativă în determinarea lui σ, de numai 14 %). În felul acesta obținem pentru eroarea medie pătratică intervalul de încredere de forma

$$0{,}857\,S < \sigma < 1{,}143\,S$$

cu nivelul de încredere 0,99.

2.5. Compararea dispersiilor

Atunci cînd se efectuează măsurări în condiții diferite, apare problema comparării preciziei măsurărilor. În particular apare problema comparării preciziei de măsurare a diferitelor aparate. Importanța acestei probleme este

subliniată îndeosebi de faptul că intervalele de încredere ale abaterilor medii pătratice se dovedesc a fi mari. Subliniem de asemenea faptul că în problemele de comparare a mediilor (punctele 2.3.2 și 2.3.3) sîntem conduși uneori mai întîi la verificarea egalității dispersiilor.

2.5.1. *Compararea a două dispersii*

Să presupunem că în două serii de măsurări s-au obținut dispersiile empirice ale datelor :

s_1^2 pentru un număr de grade de libertate k_1,

s_2^2 pentru un număr de grade de libertate k_2

(vezi punctul 2.4.2). Vom face precizarea că în cazul de față indicele 1 se referă la dispersia empirică cea mai mare : $s_1^2 > s_2^2$.

Pentru rezolvarea problemei asupra existenței unei diferențe întîmplătoare sau nu, între dispersii, se consideră raportul dintre cea mai mare dispersie empirică și cea mai mică

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = F > 1. \qquad (2.43)$$

Se alege apoi un nivel de încredere (siguranță) $\mathscr{P} = 0{,}95$ sau $\mathscr{P} = 0{,}99$ și din tabelul VII (Anexă, pag. 200) se află valoarea critică a raportului F, corespunzătoare numerelor de grade de libertate k_1 și k_2 (amintim faptul că numărul de grade de libertate k_1 se referă la dispersia empirică *cea mai mare*).

Dacă raportul (2.43) calculat pe baza rezultatelor măsurărilor se dovedește a fi mai mare decît valoarea critică, atunci se consideră că diferența între cele două dispersii este *semnificativă* (neîntîmplătoare) cu siguranța $\mathscr{P}$. Cu alte cuvinte, în acest caz precizia măsurărilor este esențial diferită în cele două serii de măsurări. În caz contrar nu avem suficiente motive pentru o astfel de afirmație.

În mod cu totul analog se procedează și la verificarea ipotezei privind egalitatea dispersiilor (vezi punctul 2.3.3).

Dacă raportul (2.43) calculat pentru două selecții se dovedește a fi mai mare decît valoarea critică, atunci ipoteza privind egalitatea dispersiilor se respinge, iar în caz contrar se acceptă.

Exemplu. Se consideră un aparat de măsurat vechi, pe care s-au efectuat 200 de măsurări cu precizia dată de dispersia empirică $s_1^2 = 3{,}82$ (unități pătrate). Un aparat de măsurat nou a condus pentru primele 15 măsurări la dispersia empirică $s_2^2 = 2{,}00$ (unități pătrate). Să se decidă dacă noul aparat de măsurat se poate considera ca avînd o precizie mai bună decît cel vechi.

Soluție. Compararea dispersiilor după formula (2.43) a condus la valoarea $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}91$, iar numerele de grade de libertate corespunzătoare sînt

$$k_2 = 200 - 1 = 199 \text{ și } k_2 = 15 - 1 = 14.$$

Deoarece valoarea raportului obținută este mai mică decît valoarea critică corespunzătoare unei siguranțe de 0,95 (care din tabelul VII se dovedește a fi mai mare decît 2,13), datele de mai sus nu ne oferă suficiente motive pentru a considera că precizia noului aparat este mai bună decît precizia celui vechi.

Pentru a da un răspuns definitiv, va trebui să facem mai multe măsurări cu aparatul cel nou. Dacă, de exemplu, pentru trei serii de cîte 15 măsurări dispersia medie rămîne aceeași $s_2^2 = 2{,}00$, atunci, ținînd seama de faptul că numărul de grade de libertate corespunzător s-a mărit pînă la $k_2 = 3 \cdot 14 = 42$, obținem cu o siguranță de 0,99 că dispersia noului aparat este semnificativ mai mică decît dispersia celui vechi, adică precizia noului aparat este superioară.

2.5.2. *Eliminarea dispersiei ce diferă semnificativ de celelalte (în cazul mai multor dispersii)*

Să presupunem că printre m aparate date (m serii de măsurări) s-a descoperit un aparat (o serie de măsurări), a cărui dispersie empirică, notată s_1^2, este în mod vădit mai mare decît celelalte. Se pune problema să decidem dacă putem considera că deosebirea dintre această dispersie s_1^2 și celelalte este semnificativă (neîntîmplătoare) sau nu.

Pentru a rezolva problema, vom proceda în modul următor. Efectuăm cu fiecare din cele m aparate supuse verificării același număr n de măsurări și calculăm

dispersiile empirice $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$ ($s_1^2 > s_i^2$ pentru $i > 1$), apoi comparăm dispersia cea mai mare s_1^2 cu suma *tuturor* dispersiilor, adică se întocmește raportul

$$G = \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_m^2}. \qquad (2.44)$$

Dacă raportul (2.44) se dovedește a fi mai mare decît valoarea critică determinată din tabelul VIII (Anexă, pag. 201), atunci diferența dintre prima dispersie și celelalte se consideră semnificativă , adică se consideră că primul aparat (prima serie de măsurări) este de o precizie mai mică decît celelalte. În caz contrar pentru o astfel de afirmație nu avem suficiente argumente.

În tabelul VIII valorile critice ale raportului G sînt date pentru două nivele de încredere $\mathscr{P} = 0{,}95$ și $\mathscr{P} = 0{,}99$ și pentru diferite valori ale lui m (numărul de aparate, de serii de măsurări) și $k = n - 1$ (numărul de grade de libertate).

Exemplu. Să presupunem că pe șase aparate s-au efectuat cîte șapte măsurări, care au condus la dispersiile empirice

3,82; 1,70; 1,30; 0,92; 0,78 și 0,81.

Comparînd prima dispersie cu suma tuturor dispersiilor, obținem raportul (2.44):

$$G = \frac{3{,}82}{3{,}82 + 1{,}70 + 1{,}30 + 0{,}92 + 0{,}78 + 0{,}81} = 0{,}410.$$

Valoarea acestui raport se dovedește a fi mai mică decît valoarea critică determinată pentru $m = 6$ și $k = n - 1 = 6$ pentru un nivel de încredere 0,95 (tabelul ne indică o valoare critică egală cu 0,418). De aceea nu avem motive să considerăm că dispersia $s_1^2 = 3{,}82$ este în mod esențial mai mare decît celelalte.

Amintim că dacă aceleași date s-ar fi obținut pentru $n = 11$ măsurări, atunci cu o siguranță mai mare de 0,99 s-ar fi putut considera că prima dispersie este mai mare decît celelalte (valoare critică corespunzătoare lui $k = 10$ și $\mathscr{P} = 0{,}99$ ar fi fost 0,408).

Criteriul descris se aplică de asemenea și la verificarea *omogenității* unei serii de dispersii, adică la verificarea faptului că toate dispersiile empirice $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$ se referă la selecții din aceeași populație cu dispersia teoretică σ. Dacă raportul (2.44) se dovedește a fi mai mare

decît valoarea critică, atunci trebuie să se considere că ipoteza omogenității seriei de dispersii nu concordă cu datele empirice.

2.6. Verificarea normalității repartiției

Toate estimațiile de mai înainte, date pe baza intervalelor de încredere atît pentru valorile medii, cît și pentru dispersii se bazează pe ipoteza de normalitate a repartiției erorilor aleatoare de măsurare și de aceea sînt aplicabile numai atita timp, cît rezultatatele experimentului nu contrazic această ipoteză.

Dacă rezultatele experimentului provoacă îndoială asupra normalității funcției de repartiție a erorilor aleatoare, atunci problema concordanței sau neconcordanței cu legea de repartiție normală trebuie verificată pe baza unui număr de măsurări suficient de mare, aplicînd unul din criteriile indicate în cele ce urmează.

2.6.1. *Criteriul de concordanță* χ^2 („hi pătrat")

Datele experimentale (se înțelege, după ce au fost eliminate erorile sistematice) se grupează pe intervale, astfel încît intervalele să acopere întreaga axă reală ($-\infty$, $+\infty$) și în plus numărul de date din fiecare interval să fie suficient de mare (în fiecare caz cel puțin cinci sau, și mai bine, zece). Pentru fiecare interval (x_{i-1}, x_i) se calculează numărul m_i de rezultate de măsurare ce cad în acest interval. După aceea se calculează probabilitatea p_i de a cădea în acest interval în ipoteza de normalitate a repartiției :

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{s}\right), \qquad (2.45)$$

unde $\bar{x}$ este media aritmetică a rezultatelor măsurărilor, s — abaterea standard empirică (eroarea medie pătratică),

iar Φ — probabilitatea (1.3), dată în tabelele I și II (Anexă, pag. 194 și 195). În sfîrșit, se calculează apoi suma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (2.46)$$

unde l este numărul tuturor intervalelor $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_{l-1}, \infty)$, iar n este numărul tuturor măsurărilor efectuate ($n = m_1 + m_2 + \ldots + m_l$).

Dacă suma (2.46) depășește valoarea critică χ^2 din tabelul IX (Anexă, pag. 202) pentru un anumit nivel de încredere $\mathscr{P}$ și numărul de grade de libertate $k = l - 3$, atunci cu o siguranță $\mathscr{P}$ se poate considera că funcția de repartiție a erorilor aleatoare în seria de măsurări considerată diferă de cea normală. În caz contrar nu avem suficiente argumente pentru o astfel de concluzie.

Atunci cînd nu există suficiente argumente pentru a respinge ipoteza de normalitate a repartiției erorilor aleatoare de măsurare, *se acceptă* ipoteza de normalitate, căci în situațiile obișnuite această ipoteză adesea poate fi fundamentată teoretic. Trebuie subliniat faptul că chiar o valoare mică a sumei (2.46) *nu poate sluji drept demonstrație* a normalității repartiției.

Să mai observăm o proprietate importantă a criteriului χ^2 : dacă repartiția diferă de cea normală, atunci pentru un număr de măsurări suficient de mare suma (2.46) va depăși valoarea critică χ^2. De aceea dacă pentru numărul de măsurări efectuate criteriul χ^2 a dat o siguranță mică, iar îndoiala asupra normalității repartiției persistă, urmează să mărim numărul măsurărilor (de un anumit număr de ori).

Numărul de grade de libertate $k = l - 3$ se referă numai la cazul în care ambii parametri ai legii normale se estimează pe baza datelor experimentale, adică atunci cînd în locul valorilor exacte a și σ se iau valorile lor empirice $\bar{x}$ și s. Dacă valoarea a se cunoaște exact (de exemplu în cazul măsurărilor etalon), atunci numărul de grade de libertate este egal cu $k = l - 2$, iar dacă se cunosc ambii parametri a și σ, atunci numărul de grade de libertate este egal cu $k = l - 1$. În practică o astfel

de situație se întîlnește rar și de aceea pentru a obține un număr de grade de libertate mai mare sau egal cu cinci va trebui să se ia un număr de intervale cel puțin egal cu opt.

În încheiere să observăm faptul că eficiența criteriului χ^2 crește, dacă în fiecare dintre intervalele de diviziune a căzut aproximativ același număr de date. De acest lucru urmează să se țină seama la gruparea inițială a materialului (dacă este posibil).

Exemplu. Vom da un exemplu de calcul al probabilităților pentru aplicarea criteriului χ^2. Vom lua pentru aceasta seria de date grupate pe intervale, considerate în exemplul de la pag. 25. Valorile parametrilor repartiției normale în acest caz au fost deja calculate (vezi pag. 34 și 35): $\bar{x} = 8{,}63$, $s = 0{,}127$. Pentru aplicarea criteriului χ^2 reunim intervalele extreme astfel ca numărul de date din fiecare interval să nu fie mai mic decît cinci. Datele obținute sînt trecute în primele două coloane ale tabelului 2.6. Intervalele extreme s-au luat de lungime infinită. În cea de-a treia coloană s-au calculat rapoartele:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 8{,}63}{0{,}127}.$$

Tabelul 2.6

Intervalele $(x_{i-1}; x_i)$	m_i	t_i	$\Phi(t_i)$	p_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty; 8{,}425)$	7	$-1{,}614$	$-0{,}4467$	0,0533	1,67	0,523
(8,425; 8,475)	5	$-1{,}220$	$-0{,}3888$	0,0579	$-0{,}79$	0,108
(8,475; 8,525)	8	$-0{,}827$	$-0{,}2959$	0,0929	$-1{,}29$	0,179
(8,525; 8,575)	10	$-0{,}433$	$-0{,}1676$	0,1283	$-2{,}83$	0,624
(8,575; 8,625)	18	$-0{,}039$	$-0{,}0156$	0,1520	2,80	0,516
(8,625; 8,675)	17	0,354	0,1383	0,1539	1,61	0,168
(8,675; 8,725)	12	0,748	0,2728	0,1345	$-1{,}45$	0,157
(8,725; 8,775)	9	1,142	0,3733	0,1005	$-1{,}05$	0,110
(8,775; 8,825)	7	1,536	0,4377	0,0644	0,56	0,048
(8,825; $+\infty$)	7	$+\infty$	0,5000	0,0623	0,77	0,095
Sumă	$100 = n$	—	—	1,0000	—	$2{,}528 = \chi^2$

Pentru extremitățile din dreapta ale intervalelor, de exemplu $t_1 = (8{,}425 - 8{,}63)/0{,}127 = -1{,}614$. În cea de-a patra coloană s-au trecut valorile corespunzătoare ale funcției $\Phi(t_i)$ din tabelul I (Anexă, pag. 194). În acest scop s-a utilizat interpolarea liniară (punctul 6.3.1). Cu ajutorul valorilor funcției $\Phi(t_i)$ în coloana a cincea s-au calculat probabilitățile p_i ca diferențe între valorile funcției $\Phi(t)$ corespunzătoare:

$$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}).$$

De exemplu, $p_2 = -0{,}3888 - (-0{,}4467) = 0{,}0579$. La calculul probabilității p_1 se ține cont de faptul că $\Phi(-\infty) = -0{,}5$. Ultimele coloane ale tabelului nu mai necesită nici o explicație. Suma numerelor trecute în ultima coloană ne dă valoarea căutată $\chi^2 = 2{,}528$. Compararea acestei valori cu valoarea critică pentru numărul de grade de libertate $k = 10 - 3 = 7$ ne indică faptul că nu avem motive să ne îndoim asupra normalității repartiției (motive de îndoială ar fi putut să apară dacă valoarea lui χ^2 calculată ar fi fost cel puțin de cinci-șase ori mai mare).

2.6.2. *Metode de verificare aproximative*

Aplicarea criteriul χ^2 descris la punctul 2.6.1 necesită un volum destul de mare de calcule.

Drept metodă aproximativă de verificare a normalității repartiției se adoptă o metodă legată de estimarea momentelor centrate de ordinul trei și patru μ_3 și μ_4 (vezi punctul 2.1.4). În cazul repartiției normale a erorilor aleatoare aceste momente sînt egale respectiv cu $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 3\sigma^4$. Estimarea acestor momente pe baza datelor experimentale se face cu ajutorul momentelor centrate empirice M_3 și M_4, așa cum s-a indicat la punctul 2.1.1. În cazul repartiției normale vor trebui să fie satisfăcute egalitățile aproximative $M_3 \approx 0$, $M_4 \approx 3s^4$. Pentru comoditatea comparației se calculează caracteristicile adimensionale: *indicatorul de asimetrie*

$$g_s = M_3/s^3$$

și *excesul*

$$E = M_4/s^4 - 3,$$

unde s este abaterea standard empirică. Ambii indicatori vor trebui să fie mici, dacă repartiția este normală. Ordinul de mărime al acestora se apreciază adesea comparativ cu erorile medii pătratice corespunzătoare, care sînt egale cu

$$\sqrt{6([n-1)/[(n+1)(n+3)]} \quad \text{pentru } g_s,$$

$$\sqrt{24n(n-2)[(n-3)/[(n-1)^2(n+3)(n+5)]} \quad \text{pentru } E,$$

unde n este numărul de date. Dacă cel puțin una dintre caracteristicile indicate luată în valoare absolută depășește semnificativ (de două-trei ori) eroarea medie pătratică a ei, atunci normalitatea repartiției urmează să fie supusă îndoielii și să se facă o analiză minuțioasă a rezultatelor experimentale [de exemplu, cu ajutorul criteriului χ^2 (punctul 2.6.1)]. În caz contrar nu avem motive pentru o astfel de îndoială.

Exemplu. Pentru rezultatele măsurărilor date în exemplul de la punctul 2.1.3 (pag. 25) momentele centrate empirice de ordinul trei și patru sînt egale respectiv cu

$$M_3 = h^3 \cdot (-2{,}4), \quad M_4 = h^4 \cdot (107{,}4).$$

Cum dispersia corectată este dată de $s^2 = h^2 \cdot 6{,}50$ (vezi pag. 35), atunci indicatorii de asimetrie și exces sînt egali cu

$$g_s = -2{,}4/6{,}50^{3/2} = -0{,}15, \quad E = 107{,}4/6{,}50^2 - 3 = 0{,}46.$$

Erorile medii pătratice ale acestor caracteristici, pentru numărul de date $n = 100$, sînt egale respectiv cu

$$\sqrt{6 \cdot 99/(101 \cdot 103)} = 0{,}24, \quad \sqrt{24 \cdot 100 \cdot 98 \cdot 97/(99^2 \cdot 103 \cdot 105)} = 0{,}46.$$

Cum nici indicatorul de asimetrie, nici cel de exces nu depășește în valoare absolută eroarea medie pătratică corespunzătoare, nu avem motive să ne îndoim de normalitatea repartiției erorilor aleatoare.

2.6.3. *Repartiția lognormală*

Sînt situații cînd ipoteza de normalitate nu mai este confirmată de rezultatele experimentale, ci, din contră, este contrazisă (adică ea este respinsă printr-unul din criteriile indicate) și utilizarea estimațiilor expuse în acest capitol se poate dovedi ca fiind neconcludentă. Uneori însă se poate determina o anumită transformare a rezultatelor măsurărilor X_i, astfel încît mărimile transformate $Y_i = f(X_i)$ să urmeze o repartiție normală. În acest caz tot ce s-a spus mai înainte despre estimații se poate aplica mărimilor transformate Y_i, după care se caută să se facă din nou trecerea la variabilele X_i.

De exemplu, se întîlnesc situații cînd rezultatele măsurărilor nu mai sînt repartizate normal, dar sînt repartizate

normal logaritmii lor. O astfel de situație apare atunci cînd factorii ce denaturează rezultatele măsurărilor provoacă un efect proporțional cu însuși rezultatul măsurării (adică atunci cînd sînt stabile în medie erorile relative de măsurare și nu erorile absolute). Într-un astfel de caz vom spune că rezultatul măsurării X urmează o *repartiție lognormală*. Dacă notăm $\ln X = Y$, adică $X = e^Y$, atunci din estimarea centrului repartiției variabilei Y:

$$MY = b \approx \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

se obține următoarea estimație a valorii medii a variabile X:

$$e^b \approx e^{\bar{y}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} e^{y_i}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

care vine să lămurească faptul că aici se aplică media geometrică și nu media aritmetică. Intervalul de încredere pentru centrul repartiției variabilei Y_i este de forma

$$\bar{y} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < b < \bar{y} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

care conduce la următorul interval de încredere pentru valoarea medie a variabilei X:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\, e^{-t\sigma/\sqrt{n}} < e^b < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\, e^{t\sigma/\sqrt{n}}.$$

Pentru valori mari ale lui n ultima relație poate fi scrisă sub forma

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\left(1 - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < e^b < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\left(1 + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

adică poate fi interpretată ca estimație a erorii relative.

Observație. Aici drept valoare medie a variabilei X s-a luat așa-numita *mediană*, egală cu e^b. Valoarea medie a variabilei X este egală cu $MX = e^{b+\sigma^2/2}$.

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORMULELOR EMPIRICE PRIN METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

3.1. Metoda celor mai mici pătrate

Dependența funcțională a unei variabile y față de altă variabilă x poate fi studiată empiric, pe cale experimentală, efectuîndu-se o serie de măsurări asupra variabilei y pentru diverse valori ale variabilei x. Rezultatele se prezintă sub forma unui tabel (tabelul 3.1) sau sub formă grafică (fig. 3.1).

Problema care se pune în acest caz este de a găsi reprezentarea analitică a dependenței funcționale căutate, adică de a alege o formulă, care să descrie rezultatele experimentului.

Particularitățile problemei constă în faptul că existența erorilor aleatoare de măsurare (sau, altfel spus, existența „zgomotului" în experiment) face nerezonabilă alegerea unei astfel de formule, care ar descrie exact toate valorile experimentale. Cu alte cuvinte, graficul funcției căutate nu trebuie să treacă prin toate punctele din fig. 3.1, ci trebuie să elimine cît mai mult posibil „zgomotul". Desigur, eliminarea „zgomotului" va fi cu atît mai precisă și sigură, cu cît numărul măsurărilor efectuate este mai mare, adică cu cît informația este mai abundentă. De exemplu, pentru a construi o dreaptă, este suficient ca să fie cunoscute cu exactitate două puncte de pe ea: (x_1, y_1) și (x_2, y_2). Însă în prezența unui „zgomot" mai mult sau mai puțin

semnificativ, așa cum se intîmplă în fig. 3.2, pentru același scop sînt necesare zeci de puncte.

Tabelul 3.1

x	x_1	x_2	...	x_k	...	x_N
y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_N

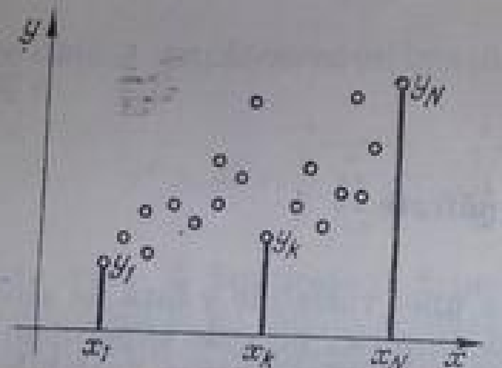

Fig. 3.1

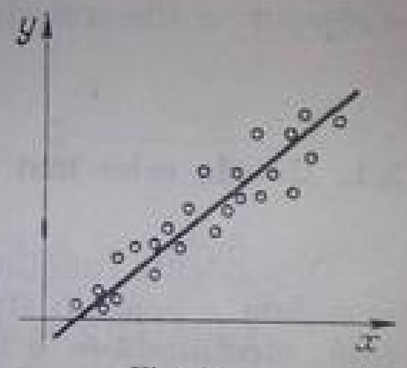

Fig. 3.2

Formula empirică se alege de obicei dintr-o mulțime de formule de tip determinat, de exemplu

$$y = ax + b, \quad y = ae^{bx} + c, \quad y = a + h \sin(\omega x + \varphi), \ldots$$

Cu alte cuvinte, problema constă în determinarea parametrilor $a, b, c, \ldots$ ai formulei, în timp ce forma formulei este cunoscută dinainte ca urmare a unor considerente teoretice sau după forma prezentării grafice a materialului empiric (vezi cap. 4).

Să notăm dependența funcțională aleasă prin

$$y = f(x; a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{3.1}$$

cu indicarea evidentă a tuturor parametrilor ce intră în definiția dependenței funcționale. Acești parametri a_0, $a_1, \ldots, a_n$ nu se pot determina exact pe baza valorilor empirice $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ale funcției, deoarece acestea din

urmă conțin erori aleatoare. Este vorba numai de obținerea unor estimații „suficient de bune" ale parametrilor căutați. Metoda celor mai mici pătrate ne permite să obținem estimații nedeplasate și consistente a tuturor parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Cel mai frecvent se întîlnește cazul cînd acești parametri intră în formula (3.1) liniar, în care caz estimațiile parametrilor obținuți prin metoda celor mai mici pătrate sînt și eficiente. Pentru aceasta se presupune că măsurările asupra valorilor $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ale funcției se fac independent una de alta și că erorile de măsurare urmează o repartiție normală.

3.1.2. *Formularea metodei celor mai mici pătrate*

Dacă toate măsurările valorilor $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ale funcției au fost efectuate cu aceeași precizie, atunci estimațiile parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se determină din condiția ca suma pătratelor abaterilor valorilor măsurate y_k de la cele calculate $f(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n)$, adică expresia

$$S = \sum_{k=1}^{N} [y_k - f(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n)]^2 \tag{3.2}$$

să ia valoarea minimă.

Dacă măsurările s-au făcut cu dispersii diferite (de precizie inegală), însă se cunosc rapoartele dispersiilor, atunci suma (3.2) se înlocuiește cu suma

$$S = \sum_{k=1}^{N} [y_k - f(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n)]^2 w_k, \tag{3.3}$$

unde factorul w_k numit *ponderea măsurării* este invers proporțional cu dispersia:

$$w_1 : w_2 : \ldots : w_N = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_N^2}.$$

Dacă toate măsurările valorilor funcției au fost făcute cu aceeași precizie, însă pentru fiecare valoare a argu-

mentului x_k s-a efectuat o serie de m_k măsurări, iar drept y_k se ia media aritmetică a rezultatelor măsurărilor într-o serie, atunci drept ponderi ale măsurărilor se pot lua numărul de măsurări al seriei $w_k = m_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Condiția formulată se păstrează și pentru determinarea estimațiilor parametrilor unei funcții de mai multe variabile. De exemplu, pentru funcția z de două variabile x și y estimațiile parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se determină din condiția ca expresia

$$S = \sum_{k=1}^{N} [z_k - f(x_k, y_k; a_0\, a_1, \ldots, a_n)]^2 w_k \qquad (3.4)$$

să fie minimă.

Aflarea valorilor parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$, care conduc la cea mai mică valoare a funcției

$$S = S(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

revine la rezolvarea sistemului de ecuații

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (3.5)$$

Dacă formula empirică (3.1) depinde liniar de parametrii necunoscuți, atunci sistemul de ecuații (3.5) va fi de asemenea liniar. Cum soluția unui sistem de ecuații liniare se obține mult mai simplu decît soluția unui sistem de ecuații neliniare, rezultă că sîntem interesați să transformăm formula empirică astfel încît să devină o funcție liniară de parametrii ce intră în componența acesteia. De exemplu, dacă funcția aleasă este $y = a + h \sin(\omega x + \varphi)$ cu parametrul ω cunoscut, atunci se recomandă să se scrie această funcție sub forma

$$y = a + b \cos \omega x + c \sin \omega x, \quad (b = h \sin \varphi,\ c = h \cos \varphi),$$

și să se determine cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate parametrii a, b, c; după aceea pe baza acestor parametri să se calculeze parametrii h și φ.

În cele ce urmează expunem în linii mari metoda celor mai mici pătrate pentru determinarea parametrilor unei funcții exprimate liniar de acești parametri.

3.2. Aflarea parametrilor (coeficienților) polinoamelor

3.2.1. *Aflarea parametrilor unei funcții liniare*

O funcție liniară se reprezintă grafic printr-o dreaptă. Pentru determinarea parametrilor ei prin metoda celor mai mici pătrate, constatăm că întotdeauna dreapta trece prin punctul $(\bar{x}, \bar{y})$ de coordonate mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor date:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_k w_k}{\Sigma w_k}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y_k w_k}{\Sigma w_k}, \qquad (3.6)$$

unde $\Sigma = \sum_{k=1}^{N}$, iar w_k sînt ponderile măsurărilor $(k = 1, 2, \ldots, N)$. De aceea ecuația dreptei este bine să fie scrisă sub forma

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}). \qquad (3.7)$$

Parametrul a se determină acum cu ajutorul relației

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \qquad (3.8)$$

unde

$$\overline{x^2} = \frac{\Sigma x_k^2 w_k}{\Sigma w_k}, \quad \overline{xy} = \frac{\Sigma x_k y_k w_k}{\Sigma w_k}. \qquad (3.9)$$

Dacă toate măsurările se fac cu aceeași precizie (adică toate ponderile $w_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, N$), atunci formulele pentru obținerea parametrilor se simplifică după cum urmează:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

Printr-o schimbare a originii de calcul și a scării pe cele două axe Ox și Oy, adică printr-o transformare liniară

$$x = x_0 + hu, \quad u = \frac{x - x_0}{h},$$

$$y = y_0 + h_1 v, \quad v = \frac{y - y_0}{h_1},$$

parametrii funcției liniare se obțin cu ajutorul formulelor :

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{u}, \quad \bar{y} = y_0 + h_1\bar{v}, \quad a = \frac{h_1}{h}\,\frac{\overline{uv} - \bar{u}\cdot\bar{v}}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2},$$

unde mediile aritmetice ale valorilor u și v se calculează cu ajutorul unor formule analoage formulelor (3.6) și (3.9). Alegerea convenabilă a originii de calcul și a scării pe axe poate simplifica considerabil toate calculele numerice.

Pentru a face un control, se repetă toate calculele cu o altă origine de calcul. Cele mai simple calcule se obțin atunci, cînd valorile argumentului se aleg *echidistante* :

$$x_{k+1} - x_k = h = \text{const} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N-1),$$

iar măsurarea valorilor funcției se face cu *aceeași precizie*. În acest caz este comod să se aleagă valorile argumentului pornind de la

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

în număr întreg de pași h pentru un număr impar de date, sau nu număr întreg de jumătăți de pași $h/2$ pentru un număr par de date. Funcția liniară se va scrie în acest caz sub forma

$$y - \bar{y} = ah\,\frac{x - \bar{x}}{h}, \tag{3.10}$$

unde parametrul ah se calculează în modul următor :

pentru un număr impar de date $N = 2M-1$:

$$ah = \frac{12}{N(N^2-1)}\sum_{k=1}^{N} y_k\,(k - M) = \frac{1}{H_1(N)}\,[(y_{M+1} - y_{M-1}) +$$

$$+ 2(y_{M+2} - y_{M-2}) + \ldots + (M-1)\,(y_N - y_1)]; \tag{3.11}$$

pentru un număr par de date $N = 2M$:

$$ah = \frac{6}{N(N^2-1)}\sum_{k=1}^{N} y_k(2k - N - 1) = \frac{1}{2H_1(N)}\,[(y_{M+1} - y_M) +$$

$$+ 3\,(y_{M+2} - y_{M-1}) + \ldots + (N-1)\,(y_N - y_1)]. \tag{3.12}$$

Valorile funcției $H_1(N) = N\,\dfrac{N^2-1}{12}$ pentru aceste formule de calcul se dau în tabelul X (Anexă, pag. 203).

Exemplu de calcul al dependenței liniare. În a doua coloană a tabelului 3.2 sînt trecute valorile funcției y pentru valori echidistante ale argumentului (valorile efective ale argumentului nu sînt trecute în tabel, deoarece ele nu intervin în calcule). Pentru comparație calculele au fost efectuate

Tabelul 3.2

Punctele	Valorile funcției	Calculul pentru $N = 7,\ M = 4$			Calculul pentru $N = 8,\ M = 4$		
k	y	$l = k-4$	$y_+ - y_-$	$l(y_+ - y_-)$	$l = 2k-9$	$y_+ - y_-$	$l(y_+ - y_-)$
1	2,35	−3			−7		
2	2,41	−2			−5		
3	2,60	−1			−3		
4	2,73	0			−1		
5	2,90	1	0,30	0,30	1	0,17	0,17
6	3,11	2	0,70	1,40	3	0,51	1,53
7	3,25	3	0,90	2,70	5	0,84	4,20
8	3,45	—	—	—	7	1,10	7,70
Suma ($N=7$)	19,35	—	—	4,40			
Suma ($N=8$)	22,80				—	—	13,60

pentru $N = 7$ puncte și pentru $N = 8$ puncte. În partea calculatorie a tabelului pentru simplificarea calculelor făcute manual s-au reunit toate valorile funcției care se înmulțesc cu factorii l, cu aceeași valoare absolută [ca în rîndul al doilea al formulelor (3.11) și (3.12)]. O astfel de comasare conduce la calculul diferențelor notate aici prin $y_+ - y_-$, care apoi se înmulțesc numai cu multiplul pozitiv l (de exemplu, în loc ca să se înmulțească 2,35 cu -3 și 3,25 cu 3 și apoi să se facă scăderea, în tabel s-a calculat diferența $3{,}25 - 2{,}35 = 0{,}90$ care s-a înmulțit apoi cu 3).

În cazul calculelor dependenței liniare pe baza a șapte puncte, avem

$$\sum_{k=1}^{7} y_k = 19{,}35, \qquad \sum_{k=1}^{7} y_k(k-4) = 4{,}40.$$

Cu ajutorul valorii funcției $H_1(N) = 28$ aflate din tabelul X (Anexă, pag. 203) pentru $N = 7$, obținem

$$\bar{y} = \frac{19{,}35}{7} = 2{,}764, \quad ah = \frac{4{,}40}{28} = 0{,}157$$

și, prin urmare,

$$y - 2{,}764 = 0{,}157\,\frac{x - \bar{x}}{h},$$

unde $\bar{x} = (x_1 + x_7)/2 = x_4$.

Pentru calculele dependenței liniare pe baza a opt puncte avem

$$\sum_{k=1}^{8} y_k = 22{,}80, \qquad \sum_{k=1}^{8} y_k(2k-9) = 13{,}60.$$

Pe baza valorii $2H_1(N) = 84$ aflate din tabelul X pentru $N = 8$, obținem

$$\bar{y} = \frac{22{,}80}{8} = 2{,}850,$$

$$ah = \frac{13{,}60}{84} = 0{,}162$$

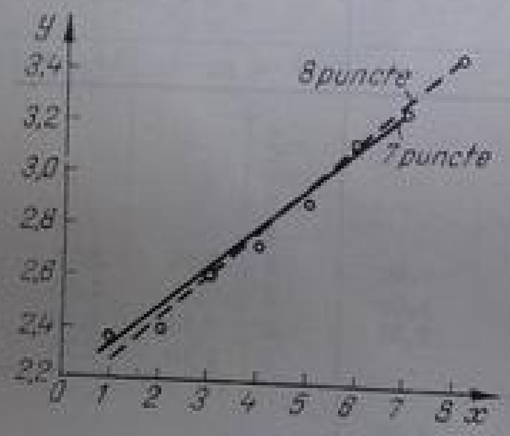

Fig. 3.3

și, prin urmare,

$$y - 2{,}850 = 0{,}162\,\frac{x - \bar{x}}{h}$$

unde

$$\bar{x} = (x_1 + x_8)/2 = x_4 + h/2.$$

Ambele drepte împreună cu punctele date sînt indicate în fig. 3.3.

3.2.2. *Determinarea parametrilor unei funcții de gradul doi*

Parametrii funcției de gradul doi

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3.13}$$

se determină din sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} as_4 + bs_3 + cs_2 &= \sum_{k=1}^{N} y_k x_k^2 w_k \\ as_3 + bs_2 + cs_1 &= \sum_{k=1}^{N} y_k x_k w_k \\ as_2 + bs_1 + cs_0 &= \sum_{k=1}^{N} y_k w_k \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

unde $s_m = \sum_{k=1}^{N} x_k^m w_k$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4)$, w_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ sînt ponderile măsurărilor.

Ca și în cazul dependenței liniare (punctul 3.2.1) calculele pot fi simplificate, alegîndu-se convenabil originea de calcul și scara pe axele de coordonate. Controlul se efectuează de asemenea reluînd calculele pentru o altă origine de calcul.

O simplificare și o precizie corespunzătoare a calculelor se realizează printr-o planificare a experimentului pentru care suma $\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^3 w_k$ se anulează (de exemplu în cazul măsurărilor cu aceeași precizie este suficient să se măsoare valorile funcției în punctele situate simetric față de $\bar{x}$). În ipoteza că sînt îndeplinite condițiile menționate mai înainte, se recomandă ca funcția de gradul doi să fie scrisă sub forma

$$y = a(x - \bar{x})^2 + b(x - \bar{x}) + c, \tag{3.15}$$

unde

$$\bar{x} = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k w_k\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{N} w_k\right).$$

Parametrii funcției (3.15) se determină cu ajutorul relațiilor

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{D}\left[\sum_{k=1}^{N} y_k (x_k - \bar{x})^2 w_k - s_2 \bar{y}\right] \\ b &= \frac{1}{s_2}\sum_{k=1}^{N} y_k (x_k - \bar{x})\, w_k,\quad c = \bar{y} - \frac{s_2 a}{s_0} \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

unde

$$s_m = \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^m\, w_k \quad (m = 0, 2, 4),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{s_0}\sum_{k=1}^{N} y_k\, w_k, \quad D = s_4 - s_2^2/s_0.$$

Dacă toate măsurările se fac cu aceeași precizie, atunci în toate formulele acestea se pun $w_1 = w_2 = \ldots = w_N = 1$ și, în particular, se obțin

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \qquad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k, \qquad s_0 = N.$$

Calculele se simplifică și mai mult, dacă valorile argumentului se aleg *echidistante*:

$$x_{k+1} - x_k = h = \text{const} \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1),$$

iar măsurările valorilor funcției y_k se fac cu *aceeași precizie*. În acest caz calculul valorilor argumentului este normal să se conducă de la valoarea medie $\bar{x} = (x_1 + x_N)/2$ în număr întreg de pași h pentru cazul unui număr impar de date, sau în număr întreg de jumătăți de pași $h/2$ în cazul unui număr par de date. Cu aceste precizări, funcția y se scrie sub forma

$$y = a_1\left(\frac{x - \bar{x}}{h}\right)^2 + b_1\left(\frac{x - \bar{x}}{h}\right) + c_1, \qquad (3.17)$$

unde parametrii a_1, b_1 și c_1 se calculează cu ajutorul formulelor de mai jos în funcție de paritatea sau imparitatea numărului de date.

Pentru un număr impar de date $N = 2M-1$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3H_2}\left[3\sum_{k=1}^{N} y_k (k - M)^2 - \frac{N^2-1}{4}\sum_{k=1}^{N} y_k\right] \\ b_1 &= \frac{1}{H_1}\sum_{k=1}^{N} y_k\,(k - M),\quad c_1 = \bar{y} - \frac{H_1}{N}a_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

unde valorile

$$H_1 = N(N^2-1)/12,\quad H_2 = N(N^2-1)(N^2-4)/180$$

se iau din tabelul X (Anexă, pag. 203, a se vedea de asemenea punctul 3.2.1).

Pentru un număr par de date $N = 2M$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{12H_2}\left[3\sum_{k=1}^{N} y_k (2k - N - 1)^2 - (N^2-1)\sum_{k=1}^{N} y_k\right] \\ b_1 &= \frac{1}{2H_1}\sum_{k=1}^{N} y_k (2k - N - 1),\quad c_1 = \bar{y} - \frac{H_1}{N}a_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

unde H_1 și H_2 au aceeași semnificație ca mai înainte și se obțin deci în același mod.

Exemplu. În coloana a doua a tabelului 3.3 se dau valorile funcției y_k pentru valori echidistante ale argumentului (valorile argumentului nu

Tabelul 3.3

Punctele	Valorile funcției	Calculul pentru $N = 7$, $M = 4$			Calculul pentru $N = 8$, $M = 4$		
k	y	$l = k-4$	$y \cdot l$	$y \cdot l^2$	$l = 2k - 9$	$y \cdot l$	$y \cdot l^2$
1	0,5	−3	−1,5	4,5	−7	−3,5	24,5
2	0,1	−2	−0,2	0,4	−5	−0,5	2,5
3	0,4	−1	−0,4	0,4	−3	−1,2	3,6
4	0,9	0	0	0	−1	−0,9	0,9
5	1,7	1	1,7	1,7	1	1,7	1,7
6	3,4	2	6,8	13,6	3	10,2	30,6
7	6,1	3	18,3	54,9	5	30,5	152,5
8	9,8	—	—	—	7	68,6	480,2
Suma ($N=7$)	13,1	—	24,7	75,5			
Suma ($N=8$)	22,9				—	104,9	696,5

se dau în tabel, deoarece ele nu sînt necesare pentru calcule). Pentru comparație, calculele s-au făcut separat pentru șapte și opt puncte.

În cazul dependenței pătratice pentru șapte puncte avem

$$\sum_{k=1}^{7} y_k = 13{,}1\,; \quad \sum_{k=1}^{7} y_k (k-4) = 24{,}7\,; \quad \sum_{k=1}^{7} y_k (k-4)^2 = 75{,}5.$$

Cu valorile $H_1(N) = 28$; $3H_2(N) = 252$ determinate din tabelul X pentru $N = 7$ și pentru $\dfrac{N^2-1}{4} = 12$, obținem

$$a_1 = \frac{1}{252}(3 \cdot 75{,}5 - 12 \cdot 13{,}1) = 0{,}275,$$

$$b_1 = \frac{1}{28} \cdot 24{,}7 = 0{,}882,$$

$$c_1 = \frac{1}{7} \cdot 13{,}1 - 4 \cdot 0{,}275 = 0{,}771\,;$$

prin urmare, $y = 0{,}275\ u^2 + 0{,}882\ u + 0{,}771$, unde

$$u = (x - \overline{x})/h, \quad \overline{x} = (x_1 + x_7)/2 = x_4.$$

În cazul dependenței pătratice pe baza a opt puncte avem

$$\sum_{k=1}^{8} y_k = 22{,}9, \quad \sum_{k=1}^{8} y_k (2k-9) = 104{,}9, \quad \sum_{k=1}^{8} y_k (2k-9)^2 = 696{,}5.$$

Cu valorile $2H_1(N) = 84$; $12H_2(N) = 2016$ aflate din tabelul X pentru $N = 8$, obținem

$$a_1 = \frac{1}{2016}(3 \cdot 696{,}5 - 63 \cdot 22{,}9) = 0{,}321,$$

$$b_1 = \frac{1}{84} 104{,}9 = 1{,}249,$$

$$c_1 = \frac{1}{8} 22{,}9 - \frac{42}{8} 0{,}321 = 1{,}178;$$

prin urmare, $y = 0{,}321\ u^2 + 1{,}249\ u + 1{,}178$, unde $u = (x - \overline{x})/h$,

$$\overline{x} = (x_1 + x_8)/2 = x_4 + h/2.$$

Parabolele calculate în ambele situații, precum și punctele date sînt indicate în fig. 3.4.

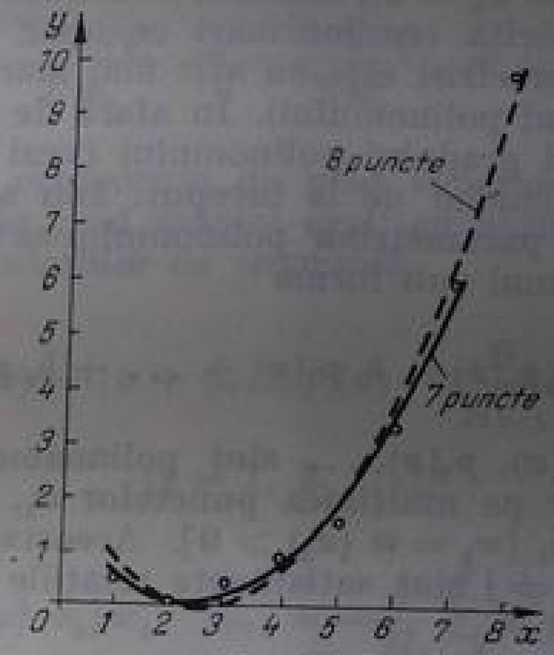

Fig. 3.4

3.2.3. *Determinarea parametrilor unui polinom*

Parametrii teoretici (coeficienții) ai unui polinom

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

se pot determina din sistemul de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} &a_0 \sum w + a_1 \sum xw + \ldots + a_n \sum x^n w = \sum yw \\ &a_0 \sum x w + a_1 \sum x^2 w + \ldots + a_n \sum x^{n+1} w = \sum y\, xw \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0 \sum x^n w + a_1 \sum x^{n+1} w + \ldots + a_n \sum x^{2n} w = \sum y x^n w \end{aligned}\right\}$$

unde semnul Σ reprezintă suma după toate datele, de exemplu $\Sigma\, xw = \sum_{k=1}^{N} x_k w_k$, iar $w_1, w_2, \ldots, w_N$ sînt ponderile măsurărilor $(N > n+1)$.

Totuși, pentru calculul coeficienților polinoamelor de grad mare $(n > 2)$ în cazul cel mai important al măsurărilor

de egală precizie (adică atunci cînd ponderile sînt egale, $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$), sistemul scris mai înainte devine inutilizabil datorită erorilor mari ce apar în rezolvarea lui (pierderea preciziei este cu atît mai mare, cu cît este mai mare gradul polinomului). În afară de aceasta, necesitatea creşterii gradului polinomului (vezi cap. 4) duce la reluarea calculelor de la început. Din aceste motive, pentru aflarea parametrilor polinomului se recomandă să se scrie polinomul sub forma

$$y = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x), \quad (3.20)$$

unde $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... sînt polinoamele ortogonale ale lui Cebîşev pe mulţimea punctelor x_1, x_2, ..., x_N cu ponderile $w(x)$, $[w_k = w(x_k) > 0]$. Aceasta înseamnă că pentru orice $i \neq j$ sînt satisfăcute relaţiile

$$\sum_{k=1}^{N} p_i(x_k)\, p_j(x_k)\, w_k = 0. \quad (3.21)$$

Parametrii expresiei (3.20) se calculează cu ajutorul formulelor

$$b_j = \frac{\sum y_k p_j(x_k) w_k}{\sum p_j^2(x_k) w_k} \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \quad (3.22)$$

care nu depind de gradul n al polinomului căutat (ceea ce ne permite, dacă este necesar, să mărim gradul polinomului fără a calcula toţi parametrii aflaţi mai înainte).

Polinoamele lui Cebîşev pînă la gradul doi inclusiv cu coeficienţii termenilor de grad cel mai mare egali cu unu sînt de forma

$$\left.\begin{aligned} &p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x - \bar{x}, \\ &p_2(x) = (x-\bar{x})^2 - \frac{\sum (x-\bar{x})^3 w}{\sum (x-\bar{x})^2 w}(x-\bar{x}) - \frac{\sum (x-\bar{x})^2 w}{N} = \\ &\quad = x^2 - \frac{\overline{x^3} - \overline{x^2}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} x + \frac{\overline{x^2}\,\bar{x} - (\overline{x^2})^2}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \end{aligned}\right\} \quad (3.23)$$

unde valorile medii se definesc în mod obişnuit:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k w_k}{\sum w_k}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum x_k^2 w_k}{\sum w_k}, \quad \overline{x^3} = \frac{\sum x_k^3 w_k}{\sum w_k}.$$

Polinoamele ortogonale de grad superior cu coeficienţii termenului de grad maxim egali cu unitatea se definesc cu ajutorul relaţiilor de recurenţă

$$p_{j+1}(x) = (x + \beta_{j+1})\, p_j(x) - \frac{H_j}{H_{j-1}} p_{j-1}(x), \quad (3.24)$$
$$(j = 1, 2, \ldots),$$

unde

$$H_j = \sum_{k=1}^{N} p_j^2(x_k)\, w_k, \quad \beta_{j+1} = -\frac{1}{H_j} \sum_{k=1}^{N} x_k p_j^2(x_k)\, w_k, \quad (3.25)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Calculul valorilor polinoamelor ortogonale Cebîşev cu ajutorul acestor relaţii de recurenţă se poate programa uşor, ceea ce permite efectuarea calculelor parametrilor polinoamelor de grad superior pe un calculator.

Simplificarea considerabilă a tuturor calculelor şi, în primul rînd, a relaţiilor de recurenţă (3.24) şi a polinoamelor ortogonale Cebîşev, obţinute cu ajutorul lor, se realizează prin planificarea corespunzătoare a experimentului şi anume se realizează atunci, cînd toate valorile funcţiei se măsoară cu aceeaşi precizie (toate ponderile măsurărilor sînt egale cu unitatea) şi toate punctele alese x_k sînt dispuse simetric faţă de valoarea lor medie $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$ (sau într-un caz mai general, cînd toate sumele abaterilor $x - \bar{x}$ de puteri impare, necesare calculării sumei $\Sigma (x_k - \bar{x})^{2m+1} w_k$, sînt nule). În acest caz este util să se folosească abaterile variabilei x_k de la valoarea medie $\bar{x}$, adică să se utilizeze dezvoltarea polinoamelor ortogonale după puterile diferenţei $x - \bar{x} = u$.

Dacă vom utiliza acest lucru, atunci toate polinoamele $p_j(u)$ de indice j par vor conține numai puterile pare ale lui u, iar polinoamele $p_j(u)$ cu indicele j impar vor conține numai puterile impare ale lui u :

$$p_j(u) = u^j + \alpha u^{j-2} + \beta u^{j-4} + \ldots$$

În particular,

$$p_0(u) = 1, \qquad p_1(u) = u. \tag{3.26}$$

Formulele de recurență (3.24) vor avea în acest caz următoarea formă :

$$p_{j+1}(u) = up_j(u) - \frac{H_j}{H_{j-1}} p_{j-1}(u), \ (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.27}$$

unde

$$H_j = H_j(N) = \sum_{k=1}^{N} p_j^2(u_k), \ (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.28}$$

De exemplu

$$p_2(u) = u^2 - \frac{H_1}{H_0} = u^2 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k^2 = u^2 - \overline{u^2}, \tag{3.29}$$

$$p_3(u) = up_2(u) - \frac{H_2}{H_1} p_1(u) = u^3 - \left(\frac{H_1}{H_0} + \frac{H_2}{H_1}\right)u. \tag{3.30}$$

Exemplu. Să presupunem că valorile funcției sînt măsurate cu aceeași precizie în șapte puncte : x_0, $x_0 \pm h$, $x_0 \pm 3h$, $x_0 \pm 6h$.

Se cere să se afle polinoamele ortogonale ale lui Cebîșev pînă la gradul al treilea inclusiv și să se scrie formulele pentru determinarea parametrilor polinomului de gradul trei, care aproximează valorile empirice ale funcției prin metoda celor mai mici pătrate.

Soluție. Mai întîi vom înlocui argumentul $(x-x_0)/h = u$. Cu această transformare, variabila u va lua în punctele date valori întregi și de semne contrarii : $u_k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$.

Aplicînd succesiv formulele (3.26), (3.28), (3.29), (3.30), aflăm polinoamele ortogonale :

$p_0(u) = 1$, $H_0 = \sum 1^2 = N = 7$ (numărul de puncte),

$p_1(u) = u$, $H_1 = \sum u_k^2 = 2(1^2 + 3^2 + 6^2) = 92$,

$$p_2(u) = u^2 - \frac{92}{7}, \ H_2 = \sum\left(u_k^2 - \frac{92}{7}\right)^2 = \sum u_k^4 - \frac{92^2}{7} = \frac{10\,828}{7},$$

$$p_3(u) = u^3 - \left(\frac{92}{7} + \frac{10\,828}{7\cdot 92}\right)u = u^3 - \frac{689}{23}u,$$

$$H_3 = \sum\left(u_k^3 - \frac{689}{23}u_k\right)^2 = \sum u_k^6 - \left(\frac{689}{23}\right)^2 \cdot 92 = \frac{280\,872}{23}.$$

Reprezentînd pe y ca un polinom de gradul trei, vom avea

$$y = b_0 + b_1 u + b_2\left(u^2 - \frac{92}{7}\right) + b_3\left(u^3 - \frac{689}{23}u\right),$$

unde parametrii b_0, b_1, b_2 și b_3 se estimează cu ajutorul formulelor :

$$b_0 \quad \bar{y} = \frac{1}{7}\sum y_k = \frac{1}{7}[y(x_0) + y(x_0+h) + y(x_0-h) + y(x_0+3h) + y(x_0-3h) + y(x_0+6h) + y(x_0-6h)],$$

$$b_1 = \frac{1}{92}\sum y_k u_k = \frac{1}{92}\{[y(x_0+h) - y(x_0-h)] + 3([y(x_0+3h) - y(x_0-3h)] + 6[y(x_0+6h) - y(x_0-6h)]\},$$

$$b_2 = \frac{7}{10\,828}\sum y_k\left(u_k^2 - \frac{92}{7}\right) = \frac{1}{10\,828}\{-92\,y(x_0) - 85\,[y(x_0+h) + y(x_0-h)] - 29[y(x_0+3h) + y(x_0-3h)] + 160\,[y(x_0+6h) + y(x_0-6h)]\}$$

$$b_3 = \frac{23}{280\,872}\sum y_k\left(u_k^3 - \frac{689}{23}u_k\right) = \frac{1}{280\,872}\{-666\,[y(x_0+h) - y(x_0-h)] - 1446\,[y(x_0+3h) - y(x_0-3h)] + 834\,[y(x_0+6h) - y(x_0-6h)]\}.$$

3.3. Polinoame ortogonale Cebîșev pentru puncte echidistante

3.3.1. *Formule fundamentale*

Dacă valorile argumentului sînt echidistante :

$$x_{k+1} - x_k = h, \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1),$$

calculul polinoamelor ortogonale Cebîşev se simplifică considerabil, dacă se face schimbarea de variabilă $u = (x - \bar{x})/h$, unde

$$\bar{x} = (x_1 + x_N)/2.$$

Ţinînd seama de faptul acesta, polinomul căutat se scrie sub forma

$$y = c_0 p_0(u) + c_1 p_1(u) + \ldots + c_n p_n(u), \qquad (3.31)$$

iar parametrii se estimează cu ajutorul relaţiilor

$$c_j = \frac{1}{H_j} \sum_{k=1}^{N} y_k p_j(u_k), \ (j = 0, 1, \ldots, n; n < N), \ (3.32)$$

unde $H_j = \sum_{k=1}^{N} p_j^2(u_k)$, iar $u_k = (x_k - \bar{x})/h$ ia numai valorile întregi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1)/2$, cînd N este impar, sau valorile $\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \pm(N-1)/2$, cînd N este par.

Polinoamele ortogonale Cebîşev cu coeficienţii termenilor de grad maxim egali cu unitatea se determină în modul următor:

$$p_0(u) = 1, \ p_1(u) = u, \qquad (3.33)$$

iar mai departe cu relaţiile de recurenţă

$$p_{j+1}(u) = u p_j(u) - \frac{H_j}{H_{j-1}} p_{j-1}(u), \ (j = 1, 2, \ldots). \qquad (3.34)$$

Aceste relaţii de recurenţă au aceeaşi formă ca şi formulele (3.27); de aceea, de exemplu, polinoamele $p_2(u)$ şi $p_3(u)$ se scriu în acest caz exact ca în formulele (3.29) şi (3.30). Variabilele H_j, precum şi rapoartele lor H_j/H_{j-1}, pe care le întîlnim aici, se pot calcula pe baza relaţiilor

$$H_j = \frac{(j!)^2 (N+j)(N+j-1)\ldots(N-j)}{4^j [(2j-1)!!]^2 (2j+1)},$$

$$\frac{H_j}{H_{j-1}} = \frac{j^2(N^2 - j^2)}{4(2j-1)(2j+1)}, \ (j = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (3.35)$$

unde $(2j-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2j-1)$. De exemplu:

$$H_0 = N, \ H_1 = \frac{N(N^2-1)}{12}, \ H_2 = \frac{N(N^2-1)(N^2-4)}{180}; \ldots$$

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{N^2-1}{12}, \ \frac{H_2}{H_1} = \frac{N^2-4}{15}, \ \frac{H_3}{H_2} = \frac{(N^2-9)\cdot 9}{140}, \ldots$$

Valorile corespunzătoare acestor variabile în funcţie de numărul de puncte N se găsesc în tabelul XI (Anexă, pag. 204—212).

Exemplu de calcul al polinoamelor ortogonale pe baza a şapte puncte date:

$$p_0(u) = 1, \ p_1(u) = u, \ p_2(u) = u^2 - 4, \ p_3(u) = u^3 - 7u,$$

$$p_4(u) = u^4 - \frac{67}{7} u^2 + \frac{72}{7};$$

iar pe baza a opt puncte date:

$$p_0(u) = 1, \quad p_1(u) = u, \quad p_2(u) = u^2 - 5\frac{1}{4},$$

$$p_3(u) = u^3 - 9\frac{1}{4} u, \qquad p_4(u) = u^4 - \frac{179}{14} u^2 + \frac{297}{16},$$

3.3.2. *Formule speciale pentru un număr impar de puncte*

Dacă se dau $N = 2L + 1$ puncte echidistante $u_k = 0, \pm 1, \ldots, \pm L$, atunci formulele explicite pentru polinoamele ortogonale sînt:

$$p_0(u) = 1, \quad p_1(u) = u, \qquad p_2(u) = u^2 - \frac{L(L+1)}{3},$$

$$p_3(u) = u^3 - \frac{3L^2 + 3L - 1}{5} u,$$

$$p_4(u) = u^4 - \frac{6L^2 + 6L - 5}{7} u^2 + \frac{3L(L^2-1)(L+2)}{35},$$

$$p_5(u) = u^5 - \frac{5(2L^2+2L-3)}{9}u^3 + \frac{15L^4+30L^3-35L^2-50L+12}{63}u,$$

$$L = \frac{N-1}{2}.$$

Scrierea polinoamelor ortogonale cu ajutorul produsului

$$u^{(m)} = u(u-1)(u-2)\ldots(u-m+1) \quad (3.36)$$

Pentru valori întregi ale variabilei u, acest simbol reprezintă produsul numerelor întregi succesive, de exemplu $10^{(5)} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$. Pentru $m = 0$ se pune $u^{(0)} = 1$.

Cu ajutorul notației introduse, polinoamele $p_j(u)$ se pot scrie astfel:

$$p_j(u) = \frac{(j!)^2(N-1)^{(j)}}{(2j)!}\,q_j(u), \quad (3.37)$$

unde polinoamele $q_j(u)$ se determină cu ajutorul relațiilor

$$q_j(u) = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\frac{(j+i)^{(2i)}}{(i!)^2}\,\frac{((N-1)/2+u)^{(i)}}{(N-1)^{(i)}} \quad (3.38)$$

$$(j = 1, 2, \ldots).$$

Polinoamele $q_j(u)$ sînt de asemenea polinoame ortogonale pentru sistemul de puncte $u_k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \ldots, \pm(N-1)/2$. Ele diferă de polinoamele $p_j(u)$ numai prin faptul că sînt normate și verifică relațiile $q_j\left(\frac{N-1}{2}\right) = 1$ (în locul condiției de egalitate cu unitatea a coeficientului termenului de grad maxim).

Suma pătratelor valorilor polinomului $q_j(u)$ în punctele u_k este egală cu

$$\sum q_j^2(u_k) = \frac{(N+j)!(N-j-1)!}{(2j+1)![(N-1)!]^2}. \quad (3.39)$$

Exemplu. Polinoamele ortogonale $q_j(u)$ de grad 0, 1, 2, 3 sînt:

$$q_0(u) = 1,\ q_1(u) = -1 + \frac{2\cdot1}{1^2}\,\frac{u+L}{N-1},$$

$$q_2(u) = 1 - \frac{3\cdot2}{1^2}\,\frac{u+L}{N-1} + \frac{4!}{2^2}\,\frac{(u+L)(u+L-1)}{(N-1)(N-2)},$$

$$q_3(u) = -1 + \frac{4\cdot3}{1^2}\,\frac{u+L}{N-1} - \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2^2}\,\frac{(u+L)(u+L-1)}{(N-1)(N-2)} + \frac{6!}{6^2}\,\frac{(u+L)(u+L-1)(u+L-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)},$$

unde $L = \frac{N-1}{2}$.

3.3.3. *Tabele de valori ale polinoamelor ortogonale*

Tabelele de valori ale polinoamelor ortogonale $p_j(u)$ în punctele u_k ne permit să simplificăm considerabil calculele legate de estimarea parametrilor cu ajutorul relațiilor (3.32). Valorile polinoamelor ortogonale pînă la gradul cinci inclusiv în punctele u_k pentru numărul de puncte $N = 5, 6, \ldots, 21$ și 23 se dau în tabelul XI (Anexă, pag. 204—212). Pentru comoditatea calculelor în tabelul XI nu se dau valorile polinoamelor $p_j(u)$, ci valorile *polinoamelor reduse* $p_j^*(u)$, care diferă de polinoamele $p_j(u)$ numai prin constantele multiplicative μ_j:

$$p_j(u) = \mu_j p_j^*(u). \quad (3.40)$$

Factorii μ_j se aleg astfel încît valorile polinoamelor reduse $p_j^*(u)$ în punctele u_k să fie numere întregi prime între ele. De exemplu, în cazul a șapte puncte, polinomul $p_3(u) = u^3 - 7u$ (vezi pag. 79) în punctele $u_k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ia valorile respective $0, \mp 6, \mp 6, \pm 6$ cu multiplul comun $\mu_3 = 6$; polinomul redus $p_3^*(u) = \frac{1}{6} p_3(u)$ va lua valorile $0, \mp 1, \mp 1, \pm 1$ respectiv; polinomul $p_4(u) = u^4 - \frac{67}{7} u^2 + \frac{72}{7}$ în aceleași puncte va lua valorile $72/7, 12/7, -84/7, 36/7$; polinomul $p_4^*(u) = \frac{7}{12} p_4(u)$ va lua valorile $6, 1, -7, 3$ respectiv.

Valorile polinoamelor reduse din tabelul XI sînt date pentru *valorile nenegative ale argumentului* u_k. Pentru valori negative ale argumentului u_k valorile polinoamelor $p_j^*(u)$ se determină din condiția că polinoamele cu indici pari sînt funcții pare, iar polinoamele cu indici impari sînt funcții impare. Cu alte cuvinte, pentru polinoamele $p_j^*(u)$ de grad par are loc relația $p_j^*(-u) = p_j^*(u)$, iar pentru polinoamele de grad impar relația $p_j^*(-u) = -p_j^*(u)$.

În tabelul XI nu se dau valorile polinomului $p_0(u)$, deoarece $p_0(u) \equiv 1$.

Pentru a exprima variabila y prin polinoamele ortogonale $p_j(u)$ [vezi relația (3.31)], parametrii c_j se pot calcula cu ajutorul polinoamelor reduse $p_j^*(u)$ după relațiile

$$c_j = \frac{1}{\gamma_j} \sum_{k=1}^{N} y_k p_j^*(u_k), \qquad (3.41)$$

unde

$$\gamma_j = \mu_j \sum_{k=1}^{N} [p_j^*(u_k)]^2 = H_j/\mu_j. \qquad (3.42)$$

Valorile mărimilor γ_j, H_j, precum și rapoartele H_j/H_{j-1} se dau în tabelul XI în ultimile linii pentru diferite valori ale lui N.

Exemplu. Cu ajutorul a șapte valori ale funcției y:

$$y_{-3}, \ y_{-2}, \ y_{-1}, \ y_0, \ y_1, \ y_2, \ y_3,$$

obținute în urma măsurărilor pentru valori echidistante ale argumentului, să se estimeze parametrii polinomului de gradul trei prin metoda celor mai mici pătrate.

Soluție. În acest caz polinoamele ortogonale (vezi tabelul XI pentru $N = 7$) sînt egale cu

$$p_0(u) = 1, \quad p_1(u) = u, \quad p_2(u) = u^2 - 4, \quad p_3(u) = u^3 - 7u.$$

Deci, exprimînd pe y sub forma unui polinom de gradul trei, obținem

$$y = c_0 + c_1 u + c_2 (u^2 - 4) + c_3 (u^3 - 7u) =$$
$$= (c_0 - 4c_2) + (c_1 - 7c_3)u + c_2 u^2 + c_3 u^3.$$

Parametrii se estimează cu ajutorul valorilor polinoamelor reduse din tabelul XI:

$$c_0 = \frac{1}{7} \sum_{k=-3}^{3} y_k = \frac{1}{7} (y_{-3} + y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3),$$

$$c_1 = \frac{1}{28} [(y_1 - y_{-1}) + 2 (y_2 - y_{-2}) + 3 (y_3 - y_{-3})],$$

$$c_2 = \frac{1}{84} [-4 y_0 - 3) (y_1 + y_{-1}) + 5 (y_3 + y_{-3})],$$

$$c_3 = \frac{1}{36} [-(y_1 - y_{-1}) - (y_2 - y_{-2}) + (y_3 - y_{-3})].$$

Calculul manual al parametrilor este comod să se facă după cum se indică în tabelul 3.4.

Tabelul 3.4

y	p_1^*	yp_1^*	p_2^*	yp_2^*	p_3^*	yp_3^*
y_{-3}	-3	$-3y_{-3}$	5	$5y_{-3}$	-1	$-y_{-3}$
y_{-2}	-2	$-2y_{-2}$	0	—	1	y_{-2}
y_{-1}	-1	$-y_{-1}$	-3	$-3y_{-1}$	1	y_{-1}
y_0	0	—	-4	$-4y_0$	0	—
y_1	1	y_1	-3	$-3y_1$	-1	$-y_1$
y_2	2	$2y_2$	0	—	-1	$-y_2$
y_3	3	$3y_3$	5	$5y_3$	1	y_3
Σy	—	Σyp_1^*	—	Σyp_2^*	—	Σyp_3^*
γ	28	—	84	—	36	—

Pentru calculul cu ajutorul unui calculator electronic, înmulțirea valorilor y_k cu valorile corespunzătoare ale polinoamelor $p_j^*(u_k)$ și adunarea produselor rezultate se efectuează fără a mai scrie rezultatele intermediare.

3.4. Reguli generale de estimare a parametrilor

Vom considera aici numai cazul cînd funcția căutată y este o funcție *liniară* de parametrii $a_0, a_1, \ldots, a_n$, adică atunci cînd aceasta poate fi pusă sub forma

$$y = a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x), \qquad (3.43)$$

unde $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt funcții date. În acest caz estimarea parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ prin metoda celor mai mici pătrate se face cu ajutorul sistemului de ecuații *normale*

$$\left.\begin{aligned}
&a_0\Sigma\varphi_0^2(x)+a_1\Sigma\,\varphi_1(x)\varphi_0(x)+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_n\Sigma\varphi_n(x)\varphi_0(x)=\Sigma\,y\varphi_0(x)\\
&a_0\Sigma\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)+a_1\Sigma\,\varphi_1^2(x)+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_n\Sigma\varphi_n(x)\,\varphi_1(x)=\Sigma\,y\varphi_1(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0\Sigma\varphi_0(x)\,\varphi_n(x)+a_1\Sigma\varphi_1(x)\,\varphi_n(x)+\ldots\\
&\qquad\ldots+a_n\Sigma\,\varphi_n^2(x)=\Sigma y\varphi_n(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.44)$$

În ipoteza că toate valorile măsurate y_k s-au obținut cu aceeași precizie (măsurări de egală precizie), sistemul de ecuații normale se obține în modul următor. Se înmulțește relația (3.43) pe rînd cu fiecare din funcțiile $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ și relațiile obținute se sumează după indicii parametrilor $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Notînd aceste sume prin Σ, obținem

$$\Sigma\varphi_0^2(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_0^2(x_k);\ldots;\Sigma\,y\,\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{N}y_k\,\varphi_n(x_k),\ n<N.$$

Dacă rezultatelor măsurărilor $y_1, y_2, \ldots, y_N$ le atribuim ponderile $w_0, w_1, \ldots, w_N$ respectiv, atunci în toate sumele

scrise mai sus fiecare termen trebuie înmulțit cu ponderea corespunzătoare, de exemplu :

$$\Sigma\varphi_0^2(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_0^2(x_k)\,w_k,\quad \Sigma y\,\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{N}y_k\,\varphi_n(x_k)\,w_k.$$

Recomandările care urmează în paragraful de față se referă în general la măsurări de egală precizie. Dacă funcția căutată depinde neliniar de parametri, atunci problema determinării parametrilor admite numai o soluție aproximativă (vezi 3.5).

3.4.1. *Sisteme de funcții ortogonale*

Spunem că funcțiile $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ formează un *sistem ortogonal* pe mulțimea punctelor $x_1, x_2, \ldots, x_N$, dacă sînt satisfăcute relațiile

$$\sum_{k=1}^{N}\varphi_i(x_k)\,\varphi_j(x_k)=0 \text{ pentru } i\neq j,\ (i,j=0,1,\ldots,n).$$

În acest caz estimarea parametrilor din relația (3.43) se simplifică considerabil și anume au loc relațiile explicite pentru parametrii

$$a_j=\frac{1}{H_j}\sum_{k=1}^{N}y_k\,\varphi_j(x_k), \qquad (3.45)$$

unde

$$H_j=\sum_{k=1}^{N}\varphi_j^2(x_k),\quad (j=0,1,\ldots,n) \qquad (3.46)$$

Dacă valorile y_k se măsoară independent una de alta și cu aceeași eroare medie pătratică σ, atunci parametrul a_j, estimat după formula (3.45), are eroarea medie pătratică egală cu $\sigma/\sqrt{H_j}$.

3.4.2. *Polinoame trigonometrice*

Dacă problema considerată conduce la necesitatea alegerii unei funcții periodice cu perioada T, atunci se obișnuiește să se reprezinte aceasta sub forma unui polinom trigonometric

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} (a_j \cos j\omega x + b_j \sin j\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{3.47}$$

Vom considera acum numai cazul cînd toate valorile funcției y_k se măsoară cu aceeași precizie și toate valorile argumentului sînt echidistante, așa că se poate considera

$$x_k = \frac{T}{N} k, \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{3.48}$$

Sistemul de funcții $\varphi_j(x)$:

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \ldots, \cos m\omega x, \sin m\omega x \left(m \leqslant \frac{N-1}{2} \right)$$

este ortogonal pe mulțimea punctelor $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ și de aceea parametrii ce intră în (3.47) se calculează cu ajutorul formulelor

$$\left.\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos j\omega x_k, \quad (j = 0, 1, \ldots, m) \\ b_j &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \sin j\omega x_k, \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

unde

$$\omega x_k = \frac{2\pi}{N} k.$$

Calculul cu ajutorul acestor formule se poate simplifica considerabil în cazul unui număr *impar* de puncte $N = 2L+1$, aplicînd următorul algoritm de calcul (algoritm care se programează ușor pe un calculator electronic).

Se calculează valorile succesive $U_{2L,j}, U_{2L-1,j}, \ldots, U_{2,j}, U_{1,j}$ cu ajutorul relațiilor de recurență

$$U_{2L,j} = y_{2L}, \quad U_{2L-1,j} = y_{2L-1} + 2 \cos \omega x_j \, y_{2L}, \tag{3.50}$$

și în continuare

$$U_{k,j} = y_k + 2 \cos \omega x_j \, U_{k+1,j} - U_{k+2,j} \qquad (k = 2L-2, 2L-3, \ldots, 2, 1). \tag{3.51}$$

Atunci

$$\left.\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{N} (y_0 + U_{1,j} \cos \omega x_j - U_{2,j}) \\ b_j &= \frac{2}{N} U_{1,j} \sin \omega x_j \end{aligned}\right\}. \tag{3.52}$$

În cazul unui număr *par* de puncte $N = 2L$ pentru calculul parametrilor cu ajutorul formulelor (3.49) se aplică cele cunoscute din *analiza armonică*. Dacă se ia cazul simplu cînd intervalul $[0, T]$ se împarte în 12 părți ($N = 12$), se pot face calculele manual destul de ușor, deoarece în acest caz valorile ωx_k sînt:

$$0, \frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6}, 3\frac{\pi}{6}, \ldots, 11\frac{\pi}{6},$$

și deci funcțiile $\cos j\omega x_k$ și $\sin j\omega x_k$ ce intră în formulele (3.49) iau numai valorile $0, \pm 1, \pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2 = \pm 0{,}8660$. De exemplu:

$$b_1 = \frac{2}{12} \sum_{k=0}^{11} y_k \sin \omega x_k = \frac{1}{6} \Big[(y_3 - y_9) +$$

$$+ \frac{1}{2} (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) + 0{,}8660 \, (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \Big].$$

$$b_2 = \frac{2}{12}\sum_{k=0}^{11} y_k \sin 2\omega x_k = \frac{0{,}8660}{6}(y_1 + y_2 - y_4 - y_5 +$$

$$+ y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11}),$$

$$b_3 = \frac{2}{12}\sum_{k=0}^{11} y_k \sin 3\omega x_k = \frac{1}{6}(y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11}).$$

3.4.3. *Funcţii liniare de mai multe variabile*

Funcţia liniară de două variabile o scriem sub forma

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}), \tag{3.53}$$

unde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k w_k}{\sum_{k=1}^{N} w_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k w_k}{\sum_{k=2}^{N} w_k}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{k=1}^{N} z_k w_k}{\sum_{k=1}^{N} w_k}, \tag{3.54}$$

iar w_k sînt ponderile măsurărilor $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Estimaţiile parametrilor a şi b prin metoda celor mai mici pătrate se determină din sistemul de două ecuaţii liniare

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2 w_k + b\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) w_k &= \\ = \sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(z_k - \bar{z}) w_k & \\ a\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) w_k + b\sum_{k=1}^{N}(y_k - \bar{y})^2 w_k &= \\ = \sum_{k=1}^{N}(y_k - \bar{y})(z_k - \bar{z}) w_k. & \end{aligned}\right\} \tag{3.55}$$

Calculul parametrilor unei funcţii liniare de două variabile se simplifică considerabil, dacă experimentul se planifică astfel, încît valorile lui z se măsoară *pentru toate perechile* (x_i, y_j), unde $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, adică dacă rezultatele măsurărilor de prelucrat se pot prezenta sub forma tabelului 3.5 cu două intrări, iar

Tabelul 3.5

y \ x	x_1	x_2	...	x_n
y_1	z_{11}	z_{21}	...	z_{n1}
...	...	...	...	...
y_m	z_{1m}	z_{2m}	...	z_{nm}

în tabel nu sînt omisiuni de date şi dacă toate măsurările sînt efectuate cu *egală precizie* (adică toate ponderile sînt egale cu unitatea). În acest caz

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0, \quad \sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y}) = 0, \quad \sum_{i,j}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = 0,$$

şi parametrii funcţiei liniare (3.53) se determină explicit cu ajutorul relaţiilor

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j, \quad \bar{z} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{ij}, \tag{3.56}$$

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\sum_{j=1}^{m}(z_{ij} - \bar{z})}{m\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\sum_{j=1}^{m} z_{ij}}{m\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} & \\ b = \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})\sum_{i=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z})}{n\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})\sum_{i=1}^{n} z_{ij}}{n\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2} & \end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

În particular, dacă valorile funcției z se măsoară pentru o rețea de puncte echidistante pentru valorile variabilelor x și y,

$$x_k = x_0 + h_1 k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N_1),$$

$$y_l = y_0 + h_2 l, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N_2),$$

și ponderile măsurărilor sînt egale cu unitatea (măsurări de egală precizie), atunci funcția liniară se determină astfel :

$$z - \bar{z} = a_1 \frac{x - x_0}{h_1} + b_1 \frac{y - y_0}{h_2}, \tag{3.58}$$

unde

$$\bar{z} = \frac{1}{(2N_1 + 1)\ (2N_2 + 1)} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \sum_{l=-N_2}^{N_2} z_{kl}, \tag{3.59}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{N_1(N_1 + 1)\ (2N_1 + 1)\ (2N_2 + 1)} \sum_{k=-N_1}^{N_1} k \sum_{l=-N_2}^{N_2} z_{kl}, \\ b_1 &= \frac{3}{N_2(N_2 + 1)\ (2N_2 + 1)\ (2N_1 + 1)} \sum_{l=-N_2}^{N_2} l \sum_{k=-N_1}^{N_1} z_{kl}. \end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

În mod analog se determină parametrii unei funcții liniare de mai multe variabile.

Exemplu de calcul al parametrilor unei funcții liniare de două variabile. Să considerăm rezultatul a cincisprezece măsurări de egală precizie al funcției z, ale căror rezultate sînt date în tabelul 3.6. Tot în acest tabel sînt trecute și datele necesare calculării sumelor.

Tabelul 3.6

$\frac{y - y_0}{h_2}$ \ $\frac{x - x_0}{h_1}$	−2	−1	0	1	2	Sumă
−1	1,2	1,5	1,9	2,1	2,7	9,4
0	1,4	1,9	2,3	3,1	3,5	12,2
1	1,8	2,1	2,6	3,5	3,9	13,9
Sumă	4,4	5,5	6,8	8,7	10,1	35,5

Pentru calculul parametrilor funcției liniare se utilizează faptul că s-au prezentat rezultatele măsurărilor variabilei z pentru toate perechile (x_i, y_j) și că valorile argumentelor sînt echidistante. Pe baza formulelor (3.59) și (3.60), obținem

$$\bar{z} = \frac{35,5}{15} = 2,367,$$

$$a_1 = \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3}(-2 \cdot 4,4 - 1 \cdot 5,5 + 1 \cdot 8,7 + 2 \cdot 10,1) = \frac{14,6}{30} = 0,487,$$

$$b_1 = \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}(-1 \cdot 9,4 + 1 \cdot 13,9) = \frac{4,5}{10} = 0,450.$$

Prin urmare, funcția liniară căutată este de forma

$$z - 2,367 = 0,487 \frac{x - x_0}{h_1} + 0,450 \frac{y - y_0}{h_2}.$$

Observație. **Dacă funcția liniară z depinde numai de o variabilă, de exemplu de x, pentru valori fixate ale celeilalte variabile (y), atunci funcțiile liniare obținute în acest caz pentru cea mai bună aproximare în medie pătratică *nu vor coincide* cu funcțiile liniare obținute din relația (3.58) pentru valori fixate ale variabilei y. Astfel, în cazul exemplului considerat mai sus pentru $y = y_0$ obținem tabelul 3.7.**

Tabelul 3.7

$u = \frac{x - x_0}{h_1}$	−2	−1	0	1	2	Sumă
z	1,4	1,9	2,3	3,1	3,5	12,2
uz	−2,8	−1,9	0	3,1	7,0	5,4

Toate datele necesare calculului sînt scrise în acest tabel ; de aici pentru funcția liniară

$$z - \bar{z} = a \frac{x - x_0}{h_1}$$

obținem după metoda celor mai mici pătrate parametrii (vezi punctul 3.2.1) :

$$\bar{z} = \frac{12,2}{5} = 2,44 ; \qquad a = \frac{5,4}{10} = 0,54 ;$$

deci funcția liniară cea mai apropiată în medie pătratică pentru $y = y_0$ va fi

$$z = 2{,}44 + 0{,}54\,\frac{x - x_0}{h_1}$$

și nu

$$z = 2{,}367 + 0{,}487\,\frac{x - x_0}{h_1}.$$

3.5. Metode aproximative și simplificate de determinare a parametrilor ce intră neliniar în formule empirice

Dacă o formulă empirică depinde neliniar de mai mulți parametri, determinarea lor prin metoda celor mai mici pătrate este legată de obicei de calcule laborioase. De aceea ne străduim să reducem problema la cazul cînd funcția depinde liniar de parametri, așa cum s-a făcut mai înainte. În multe probleme acest lucru se realizează printr-o transformare convenabilă a formulei empirice (vezi de exemplu 3.5.1). Totuși transformarea formulei empirice încalcă principiul celor mai mici pătrate. Ar fi mai adecvat să se liniarizeze problema, considerînd o corectare a valorilor aproximative ale parametrilor (vezi punctul 3.5.4). Pentru a obține valori aproximative ale parametrilor, se utilizează diferite metode simplificate (vezi 3.5.2 și 3.5.3).

3.5.1. *Metoda nivelării pentru cazul a doi parametri*

Numim *nivelare* aducerea formulei empirice

$$y = f(x; a, b)$$

la forma

$$Y = a_1 X + b_1$$

prin schimbarea convenabilă a variabilelor. Parametrii a_1 și b_1 ai formulei transformate se determină cu formulele (3.6) și după aceea cu ajutorul lor se află parametrii a și b.

Vom considera utilizarea acestei metode pe baza unor exemple de dependențe concrete, cel mai des întîlnite în probleme tehnice.

1) Pentru aflarea parametrilor funcției putere

$$y = a\,x^b$$

se folosește transformarea logaritmică $\lg y = \lg a + b \lg x$, după care se pun $X = \lg x$, $Y = \lg y$, ceea ce conduce la relația

$$Y = a_1 X + b_1, \tag{3.62}$$

unde $a_1 = b$, $b_1 = \lg a$.

2) Pentru aflarea parametrilor funcției exponențiale

$$y = a\,e^{bx} \tag{3.63}$$

se folosește transformarea logaritmică $\lg y = \lg a + b \lg e \cdot x$ și se înlocuiesc $X = x$, $Y = \lg y$, după care se ajunge din nou la o funcție liniară de tipul (3.62) cu $a_1 = b \lg e$, $b_1 = \lg a$.

3) Pentru aflarea parametrilor a și b din relația

$$y = \frac{1}{a\,x + b} \qquad \left(\text{sau } y = \frac{x}{ax + b}\right),$$

se utilizează transformarea

$$Y = \frac{1}{y} = a\,x + b \qquad \left(\text{sau } X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{y}\right).$$

4) Pentru aflarea parametrilor a și b din relația

$$y = \frac{1}{a + b\,e^{-x}}$$

se aplică transformarea

$$Y = \frac{1}{y}, \quad X = e^{-x}$$

După ce am transformat formula empirică într-una liniară de tipul (3.62), parametrii ei se pot determina cu ajutorul metodei de la punctul 3.2.1. Trebuie să avem totuși în vedere faptul că parametrii determinați prin această metodă fac minimă suma pătratelor abaterilor valorilor variabilei *transformate* Y de la valorile calculate $a_1X + b_1$ și nu suma pătratelor abaterilor valorilor *măsurate* ale lui y de la valorile calculate corespunzătoare. Cu alte cuvinte, valorile determinate ale parametrilor nu satisfac principiul celor mai mici pătrate și vor fi utilizate numai ca *primă aproximație* pentru estimații mai bune ale parametrilor. Din această cauză calculul valorilor parametrilor ce intră în funcția liniară transformată se poate face cu totul aproximativ (vezi punctul 3.5.3), urmînd ca după aceea să fie îmbunătățite (vezi punctul 3.5.4).

Ca o excepție pentru formulele de tipul (3.61) și (3.63) se poate considera cazul cînd se supun repartiției normale nu rezultatele directe ale măsurărilor, ci logaritmii lor, adică *erorile relative* de măsurare (dacă ele sînt suficient de mici). În acest caz parametrii determinați satisfac principiul celor mai mici pătrate.

3.5.2. *Cazul a trei parametri*

Pentru anumite formule empirice cu trei parametri, unul dintre parametri sau se află aproximativ sau se elimină printr-o transformare corespunzătoare, iar cei doi parametri rămași se află prin metoda nivelării. În cele ce urmează vom da exemple de transformări pentru formule care se întîlnesc cel mai frecvent.

1) Pentru formula

$$y = ax^b + c \tag{3.64}$$

parametrul c se poate determina aproximativ cu ajutorul relației

$$c = \frac{y_1 y_3 - y_2^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}, \tag{3.65}$$

unde y_1, y_2 și y_3 sînt valorile funcției empirice pentru valorile argumentului în progresie *geometrică* $x_2 : x_1 = x_3 : x_2$. Valorile x_1 și x_2 se pot alege arbitrar, însă pentru micșorarea erorii cu care determinăm parametrul c se recomandă ca aceste valori să fie alese ceva mai depărtate una de alta. După ce parametrul c a fost determinat, cu ajutorul transformării $X = \lg x$, $Y = \lg (y - c)$ aducem formula aleasă la una liniară

$$Y = bX + \lg a = bX + b_1, \quad (b_1 = \lg a).$$

După determinarea parametrilor acestei relații liniare se recomandă să se compare media aritmetică a valorilor diferențelor $y - ax^b$, pentru toate punctele date, cu valoarea determinată a lui c. În cazul unei diferențe mari urmează să alegem o altă valoare pentru c.

Uneori este util să se afle parametrii a, b, c într-o altă ordine. Dacă se cunoaște că parametrul b este mai mare ca unu, iar datele experimentale conțin valori suficient de mari ale lui x, se poate alege aproximativ valoarea parametrului b pentru funcția liniară

$$Y = bX + b_1, \quad \text{unde } Y = \lg y \text{ și } X = \lg x.$$

De aici rezultă că și parametrii a și c satisfac de asemenea o relație liniară:

$$y = aZ + c, \quad \text{unde } Z = x^b.$$

2) În cazul formulei

$$y = a e^{bx} + c \tag{3.66}$$

parametrul c se poate determina pe baza relației (3.65), însă pentru valorile funcției determinate pentru valorile

argumentului dispuse în progresie *aritmetică*, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. Pentru rest urmează să procedăm ca în cazul procedent, numai că transformările vor fi de data aceasta

$$X = x, \quad Y = \lg (y - c), \quad (Y = b \lg e \cdot X + \lg a).$$

3) Formula

$$y = ax^b e^{cx} \tag{3.67}$$

devine după logaritmare

$$\lg y = \lg a + b \lg x + c \lg e \cdot x, \tag{3.68}$$

care depinde acum liniar de parametrii b, c și $\lg a$. Parametrii ce intră în relația (3.68) se pot determina acum prin metoda generală indicată la începutul paragrafului 3.4.

Acum este posibil să se niveleze diferențele

$$\Delta \lg y_k = \lg y_{k+1} - \lg y_k = \lg \frac{y_{k+1}}{y_k}$$

dacă valorile argumentului x_k în care se măsoară valorile funcției y_k formează o progresie aritmetică sau geometrică.

Dacă valorile argumentului formează o progresie aritmetică, adică $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h$ pentru toți k, atunci

$$\Delta \lg y_k = b \Delta \lg x_k + ch \lg e$$

și nivelarea de forma $Y = a_1 X + b_1$ se obține cu schimbarea de variabile

$$Y = \Delta \lg y, \quad X = \Delta \lg x, \quad a_1 = b, \quad b_1 = ch \lg e.$$

Dacă valorile argumentului formează o progresie geometrică, adică $x_{k+1} = q x_k$ și deci

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (q - 1) x_k, \quad \Delta \lg x_k = \lg \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lg q,$$

atunci

$$\Delta \lg y_k = b \lg q + c (q - 1) \lg e \cdot x_k$$

și nivelarea de forma $Y = a_1 X + b_1$ se obține prin schimbarea de variabile

$$Y = \Delta \lg y, \quad X = x, \quad a_1 = c(q-1) \lg e, \quad b_1 = b \lg q.$$

În ambele cazuri se determină mai întîi parametrii a_1 și b_1 (vezi punctul 3.2.1) și cu ajutorul lor se calculează parametrii b și c, după care se determină parametrul a, luînd media după toate valorile, în ambii membri ai relației (3.67):

$$a = \frac{\Sigma y_k}{\Sigma x_k^b e^{cx_k}}.$$

3.5.3. *Metoda mediilor și alte metode aproximative*

Dacă determinarea parametrilor ce intră în relația $Y = aX + b$ nu trebuie făcută cu mare precizie (de exemplu, atunci cînd parametrii se determină numai într-o primă aproximație sau cînd numărul punctelor pate este suficient de mare), calculul cu ajutorul relațiilor de la punctul 3.2.1 se poate înlocui cu altul oarecum simplificat.

Metoda firelor întinse constă în faptul că rezultatele măsurărilor considerate în coordonatele X, Y se reprezintă pe o hîrtie milimetrică și se trasează (cu o linie punctată) o astfel de dreptă ca deasupra și dedesubtul ei să fie cam același număr de puncte. Parametrii acestei drepte se determină prin două puncte de pe ea. În loc să se poarte rezultatele măsurărilor considerate pe o hîrtie milimetrică obișnuită, se poate utiliza o hîrtie specială cu o rețea funcțională corespunzătoare transformării de coordonate utilizate: pe astfel de hîrtie punctele date se figurează fără nici un calcul, iar parametrii căutați se determină și aici cu ajutorul a două puncte. De exemplu, pentru determinarea parametrilor funcției putere (3.61) se folosește o hîrtie cu scară logaritmică pe ambele axe, iar pentru determinarea parametrilor funcției exponențiale (3.63) se folosește o hîrtie semilogaritmică cu o scară uniformă pe axa abscielor și o scară logaritmică pe axa

ordonatelor. În figura 3.5 este dat graficul funcției putere $y = 0{,}2\ x^2$ într-un sistem cartezian de axe de coordonate și pe o hîrtie logaritmică, unde graficul devine o dreaptă.

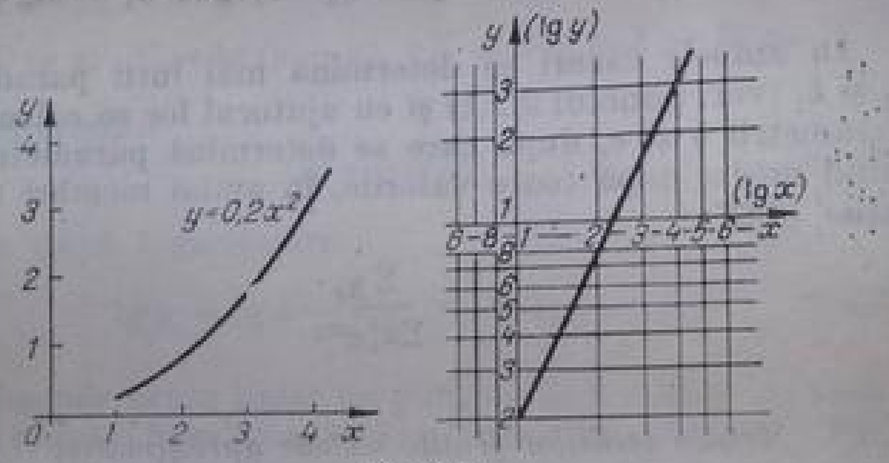

Fig. 3.5

În figura 3.6 este trasat graficul funcției exponențiale $y = 3e^{-0{,}5x}$ într-un sistem cartezian de axe de coordonate și pe o hîrtie semilogaritmică, unde s-a obținut de asemenea o dreaptă. Pe axe în acest caz se poartă valorile variabilelor x și y, însă rețeaua de coordonate nu este uniformă.

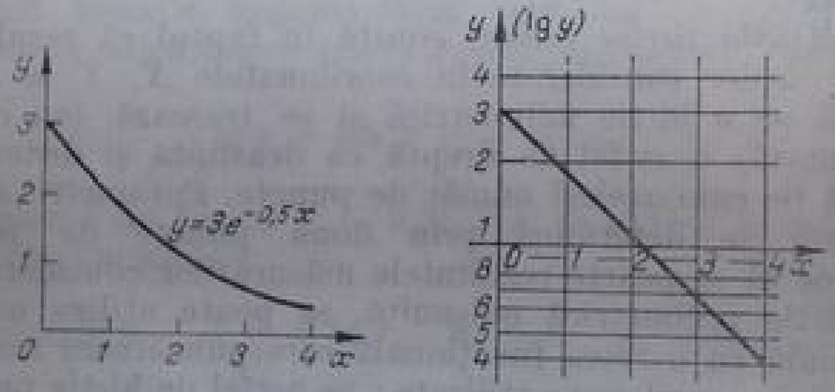

Fig. 3.6

Metoda mediilor constă în faptul că punctele experimentale se împart în două grupe aproximativ egale și pentru fiecare grupă se consideră că suma abaterilor este nulă :

$$\Sigma(Y_k - aX_k - b) = 0,$$

ceea ce conduce la un sistem de două ecuații liniare cu ajutorul cărora se determină parametrii a și b :

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{L} X_k + Lb &= \sum_{k=1}^{L} Y_k \\ a\sum_{k=L+1}^{N} X_k + (N-L)\,b &= \sum_{k=L+1}^{N} Y_k \end{aligned}\right\} \qquad (3.69)$$

unde $L = N/2$ pentru N par și $L = \dfrac{N+1}{2}$ pentru N impar.

Adunînd ecuațiile (3.69), se obține

$$b = \overline{Y} - a\overline{X}, \quad \text{unde } \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k, \quad \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k,$$

așa că și prin metoda mediilor dependența liniară este de forma

$$Y - \overline{Y} = a\,(X - \overline{X}), \qquad (3.70)$$

aceeași cu (3.7); de data aceasta parametrul a se calculează cu ajutorul relației

$$a = \frac{\dfrac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} Y_k - \overline{Y}}{\dfrac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} X_k - \overline{X}}. \qquad (3.71)$$

În mod analog se aplică metoda mediilor pentru un număr mai mare de parametri. De exemplu, pentru aflarea celor trei parametri din formula empirică

$$Y = a_0\varphi_0(X) + a_1\varphi_1(X) + a_2\varphi_2(X),$$

punctele rezultate din experiență se împart în trei grupe, de la X_1 la X_L ($L \approx N/3$), de la X_{L+1} la X_M ($M \approx 2N/3$)

și de la X_{M+1} la X_N. După aceea se egalează cu zero suma abaterilor pentru fiecare grupă de date și se obține sistemul de trei ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} a_0 \sum_{k=1}^{L} \varphi_0(X_k) + a_1 \sum_{k=1}^{L} \varphi_1(X_k) + a_2 \sum_{k=1}^{L} \varphi_2(X_k) &= \sum_{k=1}^{L} Y_k \\ a_0 \sum_{k=L+1}^{M} \varphi_0(X_k) + a_1 \sum_{k=L+1}^{M} \varphi_1(X_k) + a_2 \sum_{k=L+1}^{M} \varphi_2(X_k) &= \sum_{k=L+1}^{M} Y_k \\ a_0 \sum_{k=M+1}^{N} \varphi_0(X_k) + a_1 \sum_{k=M+1}^{N} \varphi_1(X_k) + a_2 \sum_{k=M+1}^{N} \varphi_2(X_k) &= \sum_{k=M+1}^{N} Y_k \end{aligned}\right\}$$

Remarcăm faptul că ambele metode indicate ne dau estimații cu totul grosolane ale parametrilor.

3.5.4. *Corectarea parametrilor*

Dacă în formula empirică inițială parametrii intră neliniar și se obțin printr-o anumită metodă valori aproximative ale parametrilor căutați, atunci parametrii se pot corecta prin metoda liniarizării.

Metoda liniarizării. Ne vom opri, pentru simplitate, la cazul a doi parametri, adică la o formulă empirică de tipul

$$y = f(x;\ a,\ b).$$

Vom nota valorile aproximative găsite pentru parametri prin a_0, b_0 și vom căuta corecțiile $\alpha = a - a_0$, $\beta = b - b_0$.

Dacă presupunem că aceste corecții sînt suficient de mici, atunci în dezvoltarea

$$f(x;a,b) = f(x;a_0+\alpha, b_0+\beta) = f(x;a_0,b_0) + \alpha f'_a(x;a_0,b_0) + \beta f'_b(x;a_0,b_0) + \ldots$$

ne putem mărgini numai la termenii liniari în raport cu

corecțiile α și β. Aceasta conduce la problema determinării parametrilor în cazul unei dependențe liniare

$$y - f(x;a_0,b_0) = \alpha f'_a(x;a_0,b_0) + \beta f'_b(x;a_0,b_0),$$

în care parametrii ce trebuie aflați intră liniar. Cu alte cuvinte, se obține sistemul de ecuații pentru corecțiile α și β:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \sum_{k=1}^{N} [f'_a(x_k;a_0,b_0)]^2 + \beta \sum_{k=1}^{N} f'_a(x_k;a_0,b_0)\ f'_b(x_k;a_0\,b_0) &= \\ = \sum_{k=1}^{N} [y_k - f(x_k;a_0,b_0)]\ f'_a(x_k;a_0,b_0) & \\ \alpha \sum_{k=1}^{N} f'_a(x_k;a_0,b_0)\ f'_b(x_k;a_0,b_0) + \beta \sum_{k=1}^{N} [f'_b(x_k;a_0,b_0]^2 = & \\ = \sum_{k=1}^{N} (y_k - f(x_k;a_0,b_0)]\ f'_b(x_k;a_0,b_0) & \end{aligned}\right\}$$

Dacă valorile astfel corectate ale parametrilor $a = a_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$ nu sînt suficient de precise, atunci procesul de îmbunătățire se poate repeta. Totuși, un astfel de proces de îmbunătățire succesivă va converge numai în cazul, în care aproximațiile inițiale ale parametrilor sînt suficient de apropiate de estimațiile parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate.

Dacă aproximațiile inițiale ale parametrilor se obțin prin metoda nivelării, atunci adesea se poate obține o îmbunătățire a aproximațiilor inițiale cu ajutorul unor ponderi convenabil alese. Așa de exemplu, dacă nivelarea se face cu ajutorul transformării

$$Y = g(y),$$

atunci drept ponderi se iau

$$w_k = \left[\frac{1}{g'(y_k)}\right]^2.$$

În cazul funcției exponențiale $y = ae^{bx}$ nivelarea se face cu transformarea $Y = \ln y$, care conduce la dependența

$$Y = bx + b_1, \text{ unde } b_1 = \ln a.$$

De aceea, în acest caz, se aleg drept ponderi

$$w_k = \left[\frac{1}{(\ln y)'_k}\right]^2 = y_k^2.$$

Acest lucru conduce pentru parametrii b și b_1 la sistemul de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} b_1 \sum y_k^2 + b \sum x_k y_k^2 &= \sum \ln y_k \cdot y_k^2 \\ b_1 \sum x_k y_k^2 + b \sum x_k^2 y_k^2 &= \sum \ln y_k \cdot x_k y_k^2 \end{aligned}\right\}$$

unde suma se face după toate datele de care dispunem.

Introducerea ponderilor indicate permite uneori să se micșoreze de cîteva ori suma pătratelor abaterilor pentru valorile y_k inițiale.

CAPITOLUL 4

ALEGEREA FORMULELOR EMPIRICE ȘI NETEZIREA

În capitolul 3 s-au indicat metode de aflare a parametrilor în situațiile cînd forma formulelor este cunoscută dinainte (de exemplu din analiza fizică a problemelor) Uneori însă avem de-a face cu probleme, pentru care analiza fizică prezentată nu ne conduce exact la forma formulelor sau ne permite să o alegem numai într-un cadru larg al unui anumit gen de formule. În afară de aceasta, pentru simplificarea calculelor ulterioare vom prefera să alegem tipul de dependență sub forma de polinom, fără ca să cunoaștem dinainte gradul acestuia. Mai jos se vor da cîteva recomandări privind alegerea formulei într-o serie de cazuri ce se întîlnesc mai frecvent.

4.1. Alegerea gradului optim al polinomului

În situațiile cînd se folosesc polinoame drept formule empirice apare problema alegerii gradului optim al polinomului : un polinom de grad prea mic va da o descriere prea grosolană a materialului empiric, iar un polinom de grad mare (apropiat de numărul $N-1$, unde N este numărul măsurărilor) nu va atenua „zgomotul" experimentului, adică asupra coeficienților lui se vor manifesta puternic erorile, erori provocate de datele inițiale. În particular, dacă gradul polinomului este $N-1$, atunci polinomul descrie exact toate punctele date și deci va păstra tot „zgomotul" (în situația aceasta avem interpolarea — vezi § 6.3).

4.1.1. *Elemente teoretice de bază*

Alegerea gradului optim al unui polinom pe baza datelor experimentale se face în ipoteza că dependența funcțională căutată este reprezentată exact printr-un polinom de un anumit grad n_0:

$$y = \sum_{i=0}^{n_0} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n_0} x^{n_0} \qquad (4.1)$$

și valorile măsurate ale funcției y_k sînt afectate numai de erorile aleatoare η_k. Referitor la erorile η_k se presupune că sînt independente și că urmează o lege normală cu aceeași dispersie σ^2 pentru măsurări de egală precizie sau cu dispersiile σ^2/w_k în cazul măsurărilor de inegală precizie (w_k sînt ponderile cunoscute ale măsurărilor, $k = 1, 2, \ldots, N$). Condițiile de bază se formulează în termenii dezvoltării variabilei (4.1) după polinoame ortogonale Cebîșev (vezi punctul 3.2.3):

$$y = \sum_{j=0}^{n_0} b_j p_j(x), \qquad (4.2)$$

unde $\sum_{k=1}^{N} p_i(x_k)\ p_j(x_k) w_k = 0$ pentru $i \neq j$. Parametrii b_j se estimează cu ajutorul formulelor

$$b_j = \frac{1}{H_j} \sum_{k=1}^{N} y_k p_j(x_k) w_k, \quad H_j = \sum_{k=1}^{N} p_j^2(x_k) w_k. \qquad (4.3)$$

Erorile η_k în măsurările valorilor funcției y_k introduc erorile β_j în determinarea coeficienților b_j după formula (4.3). În ipotezele stabilite mai sus, erorile β_j vor fi independente și repartizate normal cu media 0 și dispersiile σ^2/H_j ($j = 0, 1, \ldots, n_0$).

Erorile aleatoare η_k ale valorilor măsurate ale funcției și erorile β_j introduse de ele în coeficienții (4.3) dau naștere la abateri ale valorilor măsurate ale funcției de la cele calculate. Dacă valorile parametrilor b_j găsite pe baza

datelor experimentale se notează prin $(b_j)_e$, atunci abaterile R_k vor fi egale cu

$$R_k = y_k - \sum_{j=0}^{n_0} (b_j)_e p_j(x_k),$$

relație care poate fi scrisă de asemenea sub forma

$$R_k = \eta_k - \sum_{j=0}^{n_0} \beta_j p_j(x_k).$$

Abaterile R_k urmează o lege normală cu media 0 și dispersia egală cu

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{w_k} - \sum_{j=0}^{n_0} \frac{1}{H_j} p_j^2(x_k) \right).$$

Minimul sumei pătratelor abaterilor

$$S_{n_0} = \sum_{k=1}^{N} w_k R_k^2 = \sum_{k=1}^{N} w_k \left[y_k - \sum_{j=0}^{n_0} (b_j)_e p_j(x_k) \right]^2$$

are valoarea medie

$$\mathrm{M}S_{n_0} = \sigma^2 (N - n_0 - 1).$$

Raportul $\dfrac{S_{n_0}}{N - n_0 - 1}$ *constituie o estimație nedeplasată și consistentă a dispersiei* σ^2. Pentru valori suficient de mari ale numărului $N - n_0 - 1$ se poate lua $\sigma^2 \approx \dfrac{S_{n_0}}{N - n_0 - 1}$. De asemenea se consideră ca estimație nedeplasată și consistentă a dispersiei σ^2 raportul

$$\frac{S_n}{N - n - 1} = \frac{1}{N - n - 1} \sum_{k=1}^{N} w_k \left[y_k - \sum_{j=0}^{N} (b_j)_e p_j(x_k) \right]^2 \qquad (4.4)$$

pentru orice $n \geqslant n_0$. Dacă $N-n_0-1$ este suficient de mare, se poate considera

$$\sigma^2 \approx \frac{S_{n_0}}{N-n_0-1} \approx \frac{S_{n_0+1}}{N-n_0-2} \approx \dots$$

În particular, în cazul funcției liniare ($n_0 = 1$)

$$\sigma^2 \approx \frac{S_1}{N-2} \approx \frac{S_2}{N-3}.$$

4.1.2. *Regula de alegere a gradului optim*

Se calculează succesiv estimațiile parametrilor b_0, b_1, b_2, ... cu formula (4.3); după ce s-a calculat estimația succesivă b_n, se calculează suma pătratelor abaterilor corespunzătoare

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k \left[y_k - \sum_{j=0}^{n} (b_j)_e \, p_j(x_k) \right]^2,$$

care este mai comod să fie calculată cu formula

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k \, y_k^2 - (b_0^2 H_0 + b_1^2 H_1 + \dots + b_n^2 H_n) \qquad (4.5)$$

Adăugarea fiecărui nou termen $b_{n+1} p_{n+1}(x)$ la dezvoltarea lui y după polinoamele ortogonale $p_j(x)$ micșorează suma pătratelor abaterilor S_n cu mărimea $b_{n+1}^2 H_{n+1}$.

Fiecare valoare S_n astfel calculată se împarte la $N-n-1$ și raportul obținut (4.4) se compară cu valoarea precedentă a acestui raport. *Gradul polinomului ales trebuie mărit pînă cînd raportul* (4.4) *nu încetează să descrească vizibil.* Atunci valoarea $n = n_0$, după care raportul (4.4) practic nu mai descrește, ne dă gradul optim.

Exemplu. În primele două coloane ale tabelului 4.1 se dau valorile unui anumit polinom, afectate de erori aleatoare (cu aceeași dispersie σ^2). Trebuie să se stabilească polinomul cu ajutorul acestor valori „obținute", adică să se aleagă cu ajutorul lor polinomul de grad optim.

Soluție. Întrucît valorile argumentului se dau cu pasul constant $h = 0{,}1$, pentru calculul estimațiilor parametrilor b_0, b_1, b_2, ... se folosește tabelul XI de polinoame ortogonale pentru $N = 9$ (Anexă, pag. 206). Rezultatele calculului se dau în a treia și următoarele coloane ale tabelului 4.1. Pentru aceasta, corespunzător cu datele tabelului XI, se scriu valorile polinoamelor reduse p_j^* ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). De aceea în locul valorii H_j se folosesc valorile γ_j, astfel încît formula de calcul al estimațiilor parametrilor b_j capătă forma

$$b_j = \frac{1}{\gamma_j} \sum_{k=1}^{9} y_k \, p_j(u_k), \qquad u_k = \frac{x_k - 0{,}5}{0{,}1}.$$

Pentru evidență în tabelul 4.1 se trec două coloane ale produselor yp_1^* și yp_2^*. Pentru calculul pe un calculator electronic produsul valorilor funcției y_k cu valorile polinoamelor $p_j^*(u_k)$, după care urmează sumarea lor se efectuează dintr-o dată (calculatorul efectuează totalul), de aceea în ultimele coloane sînt date numai valorile polinoamelor p_3^*, p_4^*, p_5^*, care se utilizează drept factori pentru valorile corespunzătoare y_k.

Tabelul 4.1

x	y	$(y-b_0)^2$	$p_1^*=u$	$y \cdot p_1^*$	p_2^*	$y \cdot p_2^*$	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0,1	5,1234	3,4419	−4	−20,4936	28	143,4552	−14	14	−4
0,2	5,3057	2,7987	−3	−15,9171	7	37,1399	7	−21	11
0,3	5,5687	1,9879	−2	−11,1374	−8	− 44,5496	13	−11	−4
0,4	5,9378	1,0833	−1	− 5,9378	−17	−100,9426	9	9	−9
0,5	6,4370	0,2933	0	0	−20	−128,7400	0	18	0
0,6	7,0978	0,0142	1	7,0978	−17	−120,6626	−9	9	9
0,7	7,9493	0,9422	2	15,8986	−8	− 63,5944	−13	−11	4
0,8	9,0253	4,1888	3	27,0759	7	63,1771	−7	−21	−11
0,9	10,3627	11,4519	4	41,4508	28	290,1556	14	14	4
Sumă	62,8077	26,2022	—	38,0372	—	75,4386	—	—	—
γ			60		924		1188	3432	3120

Din calculul sumelor găsim

$$b_0 = \bar{y} = \frac{1}{9} \cdot 62{,}8077 = 6{,}97863,$$

$$b_1 = \frac{1}{60} \cdot 38{,}0372 = 0{,}63395,$$

$$b_3 = \frac{75{,}4386}{924} = 0{,}081644, \qquad b_4 = \frac{0{,}3429}{3432} = 0{,}00009991,$$

$$b_5 = \frac{5{,}9252}{1188} = 0{,}0049876, \qquad b_6 = \frac{0{,}0042}{3120} = 0{,}00000134.$$

Mai departe se calculează suma pătratelor abaterilor datelor experimentale de la cele calculate și raportul (4.4) pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{9} (y_k - b_0)^2 = 26{,}2022, \quad S_0/8 = 3{,}2759,$$

$$S_1 = S_0 - b_1^2 H_1 = 26{,}2022 - 0{,}63395^2 \cdot 60 = 2{,}0886, \quad S_1/7 = 0{,}2984,$$

$$S_2 = S_1 - b_2^2 H_2 = 2{,}0886 - 0{,}081644^2 \cdot 308 = 0{,}0355, \quad S_2/6 = 0{,}00059,$$

$$S_3 = S_2 - b_3^2 H_3 = 0{,}0355 - (0{,}0049876)^2 \cdot \frac{7128}{5} = 0{,}000059,$$

$$S_3/5 = 0{,}000012.$$

Deoarece calculele care urmează trebuie făcute cu o precizie mare, dăm numai rezultatele finale:

$$S_4 = 0{,}00000049, \qquad S_4/4 = 0{,}00000012,$$

$$S_5 = 0{,}00000045, \qquad S_5/3 = 0{,}00000015.$$

De aici se vede că raportul (4.4) practic rămîne constant începînd cu $n = 4$. Prin urmare, gradul optim al polinomului este $n_0 = 4$. Formula empirică căutată este

$$y = \sum_{j=0}^{4} b_j p_j(u) =$$

$$= b_0 + b_1 u + b_2\left(u^2 - \frac{20}{3}\right) + b_3\left(u^3 - \frac{59}{5}u\right) + b_4\left(u^4 - \frac{115}{7}u^2 + \frac{216}{7}\right) =$$

$$= 0{,}9991 \cdot 10^{-4} u^4 + 4{,}9876 \cdot 10^{-3} u^3 + 8{,}0003 \cdot 10^{-2} u^2 + 5{,}7510 \cdot 10^{-1} u +$$

$$+ 6{,}43742,$$

iar

$$u = \frac{x - 0{,}5}{0{,}1} = 10\,(x - 0{,}5).$$

Formula empirică obținută poate fi scrisă sub forma

$$y = 0{,}9991\,(x - 0{,}5)^4 + 4{,}9876\,(x - 0{,}5)^3 +$$
$$+ 8{,}0003\,(x - 0{,}5)^2 + 5{,}7510\,(x - 0{,}5) + 6{,}43742,$$

sau, ordonînd după puterile lui x,

$$y = 0{,}9991\ x^4 + 2{,}9894\,x^3 + 2{,}0176\,x^2 + 0{,}9919\,x + 5{,}0010.$$

Totuși, înainte de a scrie formula empirică sub forma finală, este util să estimăm erorile parametrilor ei și să rotunjim valorile găsite ale parametrilor, ținînd seama și de erorile lor înregistrate. În exemplul considerat dispersia σ^2 a rezultatelor măsurătorilor se estimează cu mărimea

$$\sigma^2 \approx S_4/4 = 12 \cdot 10^{-8}.$$

De aceea eroarea medie pătratică a parametrilor b_0, b_1, b_2, b_3 și b_4 se estimează respectiv cu relațiile

$$\sigma(b_0) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{9}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}, \qquad \sigma(b_1) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{60}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5},$$

$$\sigma(b_2) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{308}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-5}, \qquad \sigma(b_3) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1425{,}6}} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6},$$

$$\sigma(b_4) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{5883{,}5}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Rotunjim valorile parametrilor găsite, păstrînd în schimb una din cifrele îndoielnice:

$$b_0 = 6{,}9786, \qquad b_1 = 0{,}63395, \qquad b_2 = 0{,}08164,$$

$$b_3 = 0{,}00499, \qquad b_4 = 0{,}000100.$$

Substituind valorile obținute în formula empirică, desfăcînd parantezele și lăsînd la o parte în formula finală cifrele îndoielnice, vom avea

$$y = 1{,}00\ (x - 0{,}5)^4 + 4{,}99\ (x - 0{,}5)^3 + 8{,}000\,(x - 0{,}5)^2 +$$

$$+ 5{,}751\,(x - 0{,}5) + 6{,}4374 \approx 1{,}0\,x^4 + 3{,}0\,x^3 + 2{,}0\,x^2 + 1{,}0\,x + 5{,}00.$$

În felul acesta, în final, abstracție făcînd de erori, avem polinomul

$$y = x^4 + 3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 5.$$

4.2. Alegerea ordinului unui polinom trigonometric

Problema alegerii ordinului optim al unui polinom trigonometric se rezolvă ca și în cazul alegerii gradului optim al unui polinom algebric (§ 4.1).

4.2.1. *Regula de alegere a ordinului optim*

Regula de alegere a ordinului optim al unui polinom trigonometric se bazează pe ipoteza că funcția considerată y se poate reprezenta ca un polinom trigonometric de forma (3.47) de un anumit ordin $m = m_0 > 1$ și că valorile măsurate ale funcției y_k conțin numai erori aleatoare. Referitor la erori se presupune că acestea sînt independente și urmează aceeași lege normală cu dispersia σ^2 (măsurări de egală precizie). Ca și la punctul 3.4.2, se consideră aici numai cazul cînd toate valorile argumentului sînt echidistante, adică se dau prin relațiile (3.48), așa că estimațiile parametrilor a_j și b_j sînt date de relațiile (3.49).

În ipotezele menționate erorile parametrilor a_j și b_j urmează de asemenea o lege normală cu media 0 și cu dispersia $\frac{2\sigma^2}{N}$ pentru $j=1, 2, 3, \ldots$ și $4\sigma^2/N$ pentru $j=0$.

Suma pătratelor abaterilor valorilor măsurate ale funcției y_k de la cele calculate se obține cu relația

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1}\left[y_k - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{m}(a_j \cos j\omega x_k + b_j \sin j\omega x_k)\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(y_k - \frac{a_0}{2}\right)^2 - \frac{N}{2}\sum_{j=1}^{m}(a_j^2 + b_j^2). \qquad (4.6)$$

Astfel, mărirea ordinului polinomului trigonometric cu o unitate micșorează suma pătratelor abaterilor S_m cu cantitatea $\frac{N}{2}(a_{m+1}^2 + b_{m+1}^2)$.

Raportul dintre suma pătratelor abaterilor (4.6) *și numărul* $N-2m-1$ *pentru orice* $m \geqslant m_0$ *este o estimație*

nedeplasată și consistentă a dispersiei erorilor σ^2, adică pentru $N-2m_0-1$ suficient de mare se poate considera că

$$\sigma^2 \approx \frac{S_{m_0}}{N-2m_0-1} \approx \frac{S_{m_0+1}}{N-2m_0-3} \approx \ldots \qquad (4.7)$$

Această împrejurare constituie baza regulei următoare.

Ordinul m *al polinomului trigonometric se mărește pînă ce raportul dintre* S_m *și* $N-2m-1$ *nu mai descrește semnificativ.* Atunci valoarea $m = m_0$, după care acest raport practic nu mai descrește, ne dă ordinul optim.

4.2.2. *Exemplu*

Valorile unei funcții periodice cu perioada T cunoscută, măsurate în nouă puncte echidistante cu pasul $h = \frac{T}{9}$, sînt date în tabelul 4.2.

Tabelul 4.2

k	x	y	k	x	y
0	0	3,0004	5	$5h$	2,9890
1	h	5,7203	6	$6h$	4,0985
2	$2h$	3,1993	7	$7h$	1,1477
3	$3h$	−1,0981	8	$8h$	−0,1882
4	$4h$	−0,8679			

Se cere să se afle polinomul trigonometric de ordin optim.

Soluție. Cu ajutorul algoritmului expus la pag. 87 calculăm succesiv valorile U_{kj} și cu ajutorul lor determinăm parametrii a_j și b_j :

$U_{10} = 51{,}41730$, $U_{20} = 36{,}41670$; $a_0 = 4{,}00022$.

$U_{11} = -0{,}00200$, $U_{21} = -1{,}50102$; $a_1 = 0{,}99998$, $b_1 = 0{,}00029$.

$U_{12} = 13{,}70810$, $U_{22} = 5{,}38018$; $a_2 = 0{,}00011$, $b_2 = 2{,}99997$.

$U_{13} = 0{,}00008$, $U_{23} = 2{,}99912$; $a_3 = 0{,}00023$, $b_3 = 0{,}00002$.

Mai departe calculăm suma pătratelor abaterilor:

$$S_0 = \sum_{k=0}^{8} \left(y_k - \frac{a_0}{2}\right)^2 = \sum_{k=0}^{8} (y_k - 2{,}00011)^2 = 44{,}99932,$$

$$S_1 = S_0 - \frac{9}{2}(a_1^2 + b_1^2) = 40{,}49950,$$

$$S_2 = S_1 - \frac{9}{2}(a_2^2 + b_2^2) = 0{,}00031,$$

$$S_3 = S_2 - \frac{9}{2}(a_3^2 + b_3^2) = 0{,}00031.$$

Compararea rapoartelor

$$S_1/6 = 6{,}75, \quad S_2/4 = 0{,}00008, \quad S_3/2 = 0{,}00015$$

indică faptul că descreşterea acestor rapoarte se întrerupe practic pentru $m = 2$; prin urmare, ordinul optim al polinomului trigonometric este $m_0 = 2$.

Astfel, polinomul trigonometric căutat este

$$y = 2{,}00011 + 0{,}99998 \cos \omega x + 0{,}00029 \sin \omega x + \\ + 0{,}00011 \cos 2\omega x + 2{,}99997 \sin 2\omega x.$$

Cu aceasta, estimaţia dispersiei σ^2 este dată de $\sigma^2 \approx S_2/4 = 0{,}00008$. Prin urmare, abaterea medie pătratică a erorilor determinării parametrilor a_1, b_1, a_2, b_2 este dată de

$$\sqrt{\frac{2}{9}\sigma^2} \approx \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 0{,}00008} = 0{,}0042.$$

De aceea este util să se rotunjească valorile aflate ale parametrilor pînă la 0,001, ceea ce conduce la formula empirică simplă

$$y = 2 + \cos \omega x + 3 \sin 2\omega x, \quad (\omega = 2\pi/T).$$

4.3. Alegerea dintre mai multe formule

4.3.1. *Alegerea dintre formulele empirice de nivelare*

Din necesitatea alegerii unei formule de nivelare din mai multe formule, înainte de toate se trasează pe o hîrtie milimetrică punctele corespunzătoare fiecărei metode posibile şi se preferă acea formulă, pentru care punctele se dispun cel mai bine în jurul unei drepte.

Şi mai sigur este rezultatul dat de compararea sumelor pătratelor abaterilor valorilor măsurate ale funcţiei de la valorile calculate cu fiecare din formulele empirice considerate şi se alege acea formulă, pentru care o astfel de sumă este cea mai mică. O astfel de alegere presupune însă precizarea prealabilă a parametrilor fiecăreia dintre formulele ce se compară (vezi punctul 3.5.4).

4.3.2. *Funcţiile putere şi exponenţială*

Pentru alegerea între funcţiile putere şi exponenţială este comod să se folosească hîrtia logaritmică sau semilogaritmică. Practic, pentru a alege între funcţia putere şi funcţia exponenţială se figurează punctele experimentale (fără nici un calcul) pe hîrtie logaritmică şi pe hîrtie semilogaritmică: dacă punctele se dispun bine în jurul unei drepte pe hîrtia logaritmică, atunci alegem funcţia putere $y = ax^b$; dacă punctele se dispun bine în jurul unei drepte pe o hîrtie semilogaritmică, atunci alegem funcţia exponenţială $y = ae^{bx}$. După ce s-a ales funcţia corespunzătoare, parametrii ei a şi b se determină cu ajutorul a două puncte de pe dreaptă obţinută (vezi punctul 3.5.3).

Dacă nu avem la îndemînă hîrtiile menţionate, ne putem folosi de faptul că valorile funcţiei putere sînt în progresie *geometrică* dacă valorile argumentului sînt în progresie *geometrică*, iar valorile funcţiei exponenţiale sînt în progresie *geometrică*, dacă valorile argumentului sînt în progresie *aritmetică*. De aceea pentru a alege între cele două tipuri de funcţii se efectuează două serii de experienţe: una în care valorile argumentului sînt echidistante $x_{k+1} = x_k + h$ şi alta în care valorile argumentului sînt în progresie geometrică $x_{k+1} = x_k q$. După aceasta pentru fiecare din cele două serii de experienţe se calculează rapoartele

$$\frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{y_3}{y_2}, \quad \frac{y_4}{y_3}, \ldots$$

şi se alege acea serie pentru care aceste rapoarte sînt cît mai constante. În acelaşi mod se alege şi forma formulei

empirice : dacă se dovedesc mai constante rapoartele valorilor funcției pentru valori echidistante ale argumentului, atunci se alege funcția exponențială, iar în caz contrar se alege funcția putere.

Exemplu. Pe baza datelor din tabelul 4.3, să se facă alegerea între funcțiile putere și exponențială.

Tabelul 4.3

k	x	y	k	x	y	k	x	y
1	0,4	0,043	5	1,2	1,068	9	2,0	4,981
2	0,6	0,139	6	1,4	1,699	10	2,2	6,664
3	0,8	0,311	7	1,6	2,572	11	2,4	8,595
4	1,0	0,637	8	1,8	3,646			

Soluție. Vom considera mai întîi rapoartele valorilor y_k pentru puncte echidistante :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{0,139}{0,043} = 3,23, \quad \frac{y_3}{y_2} = \frac{0,311}{0,139} \quad 2,24,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = \frac{0,637}{0,311} = 2,05, \ldots, \frac{y_{10}}{y_9} = \frac{6,664}{4,981} = 1,34, \quad \frac{y_{11}}{y_{10}} = \frac{8,595}{6,664} = 1,29.$$

Se constată imediat că aceste rapoarte descresc sistematic, ultimul raport fiind aproape de trei ori mai mic decît primul ; prin urmare, nu convine funcția exponențială.

Să calculăm acum rapoartele valorilor y_k pentru punctele x_k dispuse într-o progresie geometrică cu rația $q = 2$ (adică pentru acele puncte x_k și x_i, pentru care $x_k/x_i = 2$) :

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{0,311}{0,043} = 7,68, \quad \frac{y_5}{y_2} = \frac{1,068}{0,139} = 8,27, \quad \frac{y_7}{y_3} = \frac{2,572}{0,311} = 8,27,$$

$$\frac{y_9}{y_4} = \frac{4,981}{0,637} = 7,83, \quad \frac{y_{11}}{y_5} = \frac{8,595}{1,068} = 8,06.$$

Constatăm că aceste rapoarte sînt aproape constante. O situație analoagă are loc și pentru punctele dispuse în progresie geometrică cu rația $q = 3$:

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{1,068}{0,043} = 24,8, \quad \frac{y_8}{y_2} = \frac{3,646}{0,139} = 28,4, \quad \frac{y_{11}}{y_3} = \frac{8,595}{0,311} = 27,6.$$

Și în acest caz rapoartele sînt aproximativ constante. Prin urmare, trebuie să dăm preferință funcției putere ($y = ax^b$).

Observație. Luînd valoarea medie a rapoartelor considerate, putem calcula aproximația inițială a parametrului b al funcției putere $y = ax^b$ cu ajutorul relației

$$b = \frac{\lg \overline{(y_{k+1}/y_k)}}{\lg q},$$

unde $\overline{y_{k+1}/y_k}$ este media aritmetică a rapoartelor considerate pentru punctele ce formează o progresie geometrică cu rația q.

Astfel, pentru exemplul dat și pentru $q = 2$ obținem

$$\overline{y_{k+1}/y_k} = \frac{7,68 + 8,27 + 8,27 + 7,83 + 8,06}{5} = 8,02$$

și

$$b = \frac{\lg 8,02}{\lg 2} = 3,00,$$

iar pentru $q = 3$ obținem

$$\overline{y_{k+1}/y_k} = \frac{24,8 + 28,4 + 27,6}{3} = 26,9$$

și

$$b = \frac{\lg 26,9}{\lg 3} = 3,00.$$

În felul acesta într-o primă aproximație se poate considera că formula empirică este de forma $y = ax^3$; rămîne de determinat parametrul a, care oricum intră liniar în funcția y.

În mod cu totul analog, în cazul rapoartelor aproape constante y_{k+1}/y_k pentru punctele echidistante $x_{k+1} = x_k + h$, se poate lua media aritmetică a acestor rapoarte și să se calculeze aproximația inițială a parametrului b al funcției exponențiale $y = ae^{bx}$ după formula

$$b = \frac{\lg \overline{(y_{k+1}/y_k)}}{h \lg e}.$$

4.4. Ajustarea datelor empirice

4.4.1. *Punerea problemei*

Dacă numărul punctelor experimentale este mare, alegerea formulei empirice poate deveni cu totul complicată : o formulă cu un număr mic de parametri poate să

dea o eroare mare iar una cu un număr mare de parametri poate fi incomodă pentru analiză. Pe de altă parte, multe probleme de analiză (de exemplu cele legate de diferențiere sau integrare) nu necesită o formulă analitică pentru toate datele. Pentru analiză este important numai să se înlăture „zgomotul" experimentului, păstrînd informația asupra funcției adevărate. În acest scop se aplică ajustarea datelor empirice, adică se înlocuiește tabelul datelor punctelor experimentale cu alt tabel de date apropiate de cele obținute experimental, situate pe o curbă suficient de netedă.

Ajustarea se efectuează cu ajutorul polinoamelor (de dorit de grad optim), ce aproximează prin metoda celor mai mici pătrate grupele alese de date experimentale. Deoarece cea mai bună ajustare se obține pentru punctele medii (cînd se ține seama de informația asupra comportării funcției de ambele părți ale punctelor ajustate), numărul de puncte pentru ajustare se alege impar, iar grupele de puncte se deplasează de-a lungul întregului tabel : se iau de exemplu primele cinci puncte y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 și se ajustează cu ajutorul lor punctul mediu y_3, apoi se ia următorul grup y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 și se ajustează punctul y_4 etc. pînă se sfîrșește tabelul. Prin aceasta, desigur, rămîn unele puncte de la capetele tabelului (de exemplu două la începutul tabelului și două la sfîrșitul acestuia), care se ajustează cu o precizie mai mică.

Dăm mai jos cele mai des utilizate dintre formulele simple de ajustare pentru un tabel cu pas constant. În aceste formule se folosesc următoarele notații. Punctul mediu al grupului se scrie cu indicele 0, iar punctele situate simetric față de acesta cu indicii ± 1, ± 2, ... Valorile ajustate se notează cu litera corespunzătoare cu tildă deasupra. Drept formulă fundamentală folosim formula de ajustare a punctului mediu, adică formula pentru $\tilde{y}_0$, formulele celelalte aplicîndu-se numai la capetele tabelului.

4.4.2. *Ajustarea liniară*

Numim ajustare liniară ajustarea făcută cu polinoame de gradul întîi.

Formulele de ajustare liniară după *trei* puncte sînt

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_1),$$

$$\tilde{y}_{-1} = \frac{1}{6}(5y_{-1} + 2y_0 - y_0),$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{6}(-y_{-1} + 2y_0 + 5y_1),$$

iar cele după *cinci* puncte

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{5}(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2),$$

$$\tilde{y}_{-1} = \frac{1}{10}(4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_1),$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{10}(y_{-1} + 2y_0 + 3y_1 + 4y_2),$$

$$\tilde{y}_{-2} = \frac{1}{5}(3y_{-2} + 2y_{-1} + y_0 - y_2),$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{5}(-y_{-2} + y_0 + 2y_1 + 3y_2).$$

Exemplu. În tabelul 4.4 s-a efectuat o ajustare liniară după trei puncte ($N = 3$), după cinci puncte ($N = 5$) și o ajustare repetată după cinci puncte.

Asupra suficienței gradului de netezire a tabelului după ajustarea repetată se poate judeca după tabelul diferențelor (Δy), care variază lin (spre deosebire de diferențele datelor inițiale). Urmează însă să avem în vedere că *rezultatul ajustării depinde esențial de formula de ajustare, a cărei alegere este sugerată mai curînd de intuiție decît de o anumită regulă.*

Tabelul 4.4

Date inițiale			Ajustare liniară				Ajustare repetată	
			$N=3$		$N=5$		$(N=5)$	
x	y	Δy	$\tilde{y}$	$\Delta\tilde{y}$	$\tilde{y}$	$\Delta\tilde{y}$	$\tilde{y}$	$\Delta\tilde{y}$
0	431		424		402		405	
		−22		−1		21		17
1	409		423		423		422	
		20		−3		21		17
2	429		420		444		439	
		− 7		40		15		17
3	422		460		459		456	
		108		26		10		16
4	530		486		469		472	
		−25		12		14		13
5	505		498		483		485	
		−46		−10		21		14
6	459		488		504		499	
		40		7		6		17
7	499		495		510		516	
		27		34		17		20
8	526		529		527		536	
		37		30		27		21
9	563		559		554		557	
		24		23		30		28
10	587		582		584		585	
		8		28		28		31
11	595		610		612		616	
		52		27		37		34
12	647		637		649		650	
		22		50		34		34
13	669		687		683		684	
		77		38		37		36
14	746		725		720		720	
		14		36		36		32
15	760		761		756		752	
		18		28		36		32
16	778		789		792		784	
		50		28		18		31
17	828		817		810		815	
		18		20		31		31
18	846		837		841		846	
		−10		29		35		30
19	836		866		876		876	
		80		37		33		33
20	916		903		909		909	
		40		60		33		33
21	956		963		942		942	

4.4.3. *Ajustarea neliniară*

Din mulțimea formulelor de ajustare neliniară vom da aici complet numai formulele de ajustare cu polinoame de gradul trei după șapte puncte:

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{21}(-2y_{-3}+3y_{-2}+6y_{-1}+7y_0+6y_1+3y_2-2y_3),$$

$$\tilde{y}_{-1} = \frac{1}{42}(-4y_{-3}+16y_{-2}+19y_{-1}+12y_0+2y_1-4y_2+y_3),$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{42}(y_{-3}-4y_{-2}+2y_{-1}+12y_0+19y_1+16y_2-4y_3),$$

$$\tilde{y}_{-2} = \frac{1}{42}(8y_{-3}+19y_{-2}+16y_{-1}+6y_0-4y_1-7y_2+4y_3),$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{42}(4y_{-3}-7y_{-2}-4y_{-1}+6y_0+16y_1+19y_2+8y_3),$$

$$\tilde{y}_{-3} = \frac{1}{42}(39y_{-3}+8y_{-2}-4y_{-1}-4y_0+y_1+4y_2-2y_3),$$

$$\tilde{y}_3 = \frac{1}{42}(-2y_{-3}+4y_{-2}+y_{-1}-4y_0-4y_1+8y_2+39y_3).$$

Formule de ajustare cu polinoame de grad mai mare, practic, aproape nu se utilizează, iar formule de ajustare pe baza unui număr mare de puncte se utilizează cu totul rar, căci ele cuprind un număr mare de puncte prost ajustate la capetele tabelelor. Drept exemplu, mai jos se dau două formule pentru punctul mediu $\tilde{y}_0$ pentru o

ajustare cu un polinom de gradul trei prin nouă și unsprezece puncte:

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{231}(-21y_{-4} + 14y_{-3} + 39y_{-2} + 54y_{-1} + 59y_0 + 54y_1 + 39y_2 + 14y_3 - 21y_4),$$

$$\tilde{y}_0 = \frac{1}{429}(-36y_{-5} + 9y_{-4} + 44y_{-3} + 69y_{-2} + 84y_{-1} + 89y_0 + 84y_1 + 69y_2 + 44y_3 + 9y_4 - 36y_5).$$

Coeficienții relativ mari fac aceste formule incomode pentru calcul și sensibile la erori. Oarecum mai comodă este formula de ajustare prin douăzeci și unu de puncte, însă ea este utilă numai pentru tabele foarte mari și nu se va da aici.

CAPITOLUL 5

DEPENDENȚA STOCHASTICĂ

Pentru studiul dependenței dintre două variabile, fiecare dintre ele fiind supusă la o împrăștiere aleatoare (împrăștierea necontrolabilă), se aplică metode de analiză a corelației. Analiza de corelație studiază legea medie de comportare a fiecăreia dintre variabile în funcție de valorile celeilalte variabile, precum și măsura dependenței dintre variabilele considerate. Atașind fiecărei valori a uneia dintre variabile, de exemplu, a lui x, media valorilor corespunzătoare ale celeilalte variabile, să spunem, ale lui y, obținem *funcția de regresie* sau, mai simplu, *regresia lui y asupra lui x*. În funcție de cum se ia aici valoarea medie teoretică (vezi punctul 2.1.4) sau valoarea medie empirică (media aritmetică a rezultatelor experimentului), avem de-a face cu regresia teoretică sau cu regresia empirică. Funcția de regresie se reprezintă grafic prin *curba de regresie*. În figura 5.1 este trasată, spre exemplu, curba de regresie a lui y asupra lui x, care indică dependența productivității medii y a cuptoarelor Martin la o uzină, în funcție de procentul x de carbon conținut în metal. Analog

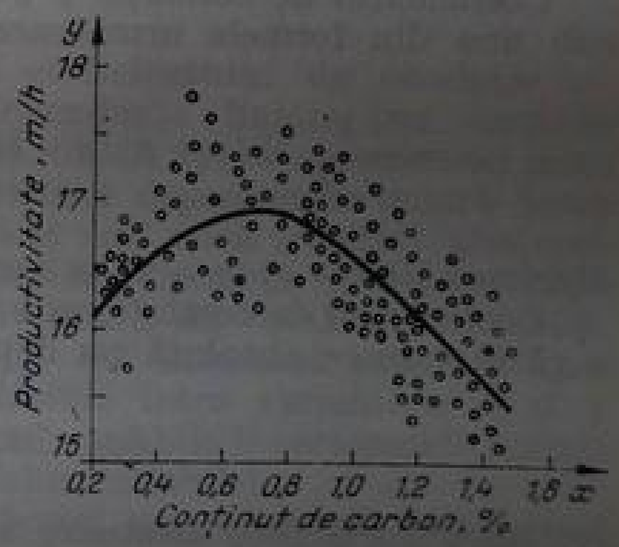

Fig. 5.1

se definește regresia variabilei x asupra variabilei y. Măsura dependenței dintre mărimi este caracterizată prin *coeficientul de corelație* sau prin *raportul de corelație*.

5.1. Corelație liniară

Corelația dintre mărimile x și y se numește *liniară*, dacă ambele funcții de regresie sînt liniare. În acest caz curbele de regresie sînt drepte de regresie. Pantele acestor drepte se exprimă prin coeficientul de corelație, care este măsura dependenței liniare dintre mărimile x și y.

5.1.1. *Coeficient de corelație; mod de calcul*

Coeficientul de corelație ρ dintre variabilele aleatoare x și y este, prin definiție, valoarea medie a produsului abaterilor normate:

$$\rho = \mathrm{M}\left(\frac{x-a}{\sigma_x} \cdot \frac{y-b}{\sigma_y}\right), \tag{5.1}$$

unde $a = \mathrm{M}x$ și $b = \mathrm{M}y$ sînt centrele repartițiilor variabilelor x și y, iar σ_x^2 și σ_y^2 dispersiile lor.

Coeficientul de corelație ρ poate fi scris de asemenea sub una din formele următoare:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \mathrm{M}(x-a)(y-b) = \frac{\mathrm{M}(xy) - \mathrm{M}x\mathrm{M}y}{\sigma_x \sigma_y} \tag{5.2}$$

Mărimea $\mathrm{M}(x-a)(y-b)$ se numește *moment de corelație*.

Coeficientul de corelație este o mărime adimensională, a cărei valoare absolută nu depășește unitatea:

$$|\rho| \leqslant 1. \tag{5.3}$$

Dacă variabilele aleatoare x și y sînt independente, atunci coeficientul lor de corelație este egal cu zero.

Se poate însă ca acest coeficient de corelație să fie nul și totuși variabilele x și y să fie dependente (în care caz vom spune că variabilele x și y sînt *necorelate*). Coeficientul de corelație caracterizează măsura dependenței *liniare* dintre x și y. Aceasta înseamnă următoarele. Fie $Ax + B$ funcția liniară de cea mai bună aproximație în medie pătratică a lui y, adică acea funcție liniară pentru care valoarea medie $\mathrm{M}[y - (Ax + B)]^2$ ia cea mai mică valoare. Să notăm prin z eroarea acestei aproximații:

$$z = y - (Ax + B).$$

Atunci valoarea medie a variabilei aleatoare z este egală cu zero, iar raportul dintre dispersia ei și dispersia lui y se determină numai prin mărimea coeficientului de corelație după relația

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma_y^2} = 1 - \rho^2. \tag{5.4}$$

În mod analog, dacă $Cy + D$ este funcția liniară de cea mai bună aproximație în medie pătratică a variabilei x și $u = x - (Cx + D)$ este eroarea acestei aproximații, atunci

$$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2} = 1 - \rho^2. \tag{5.5}$$

Egalitatea cu zero a coeficientului de corelație înseamnă absența unei dependențe liniare (nu exclude însă dependența neliniară). Cu cît $|\rho|$ se apropie mai mult de 1, cu atît este mai strînsă dependența liniară între variabile, adică este cu atît mai mică (relativ) abaterea medie pătratică a reprezentării fiecăreia dintre variabile cu ajutorul unei funcții liniare de cealaltă variabilă.

În sfîrșit, egalitatea $|\rho| = 1$ înseamnă prezența unei dependențe *funcționale liniare* între variabilele x și y (adică, fiecărei valori a unei variabile îi corespunde numai o singură valoare a celeilalte variabile).

Pentru studiul dependenței experimentale între două variabile x și y se efectuează un anumit număr n de expe-

rienţe independente (observaţii, încercări). Rezultatul celei de a i-a experienţe ne dă o pereche x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Cu aceste valori se determină estimaţiile punctuale ale valorilor medii, precum şi coefcientului de corelaţie.

Estimaţiile nedeplasate şi consistente ale valorilor medii teoretice a şi b sînt valorile medii empirice

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5.6}$$

Estimaţiile nedeplasate şi consistente ale dispersiilor σ_x^2 şi σ_y^2 sînt dispersiile empirice

$$\left.\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 n\right] \\ s_y^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2 n\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

În sfirşit, estimaţia nedeplasată şi consistentă a momentului de corelaţie este *momentul empiric de corelaţie*

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}\,n\right]. \tag{5.8}$$

Cu aceste estimaţii se construieşte *coeficientul empiric de corelaţie*

$$r = \frac{1}{s_x s_y}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,(y_i-\bar{y}). \tag{5.9}$$

Coeficientul empiric de corelaţie r ne dă o estimaţie consistentă, însă deplasată, a coeficientului teoretic de corelaţie şi anume această estimaţie este deplasată cu $-\frac{\rho\,(1-\rho^2)}{2n}$. Mărimea acestei deplasări descreşte invers

proporţional cu un număr n de observaţii, iar pentru $n > 50$ constituie mai puţin de 1%.

Coeficientul empiric de corelaţie, ca şi cel teoretic, nu depăşeşte în valoare absolută unitatea.

Coeficientul empiric de corelaţie nu se modifică dacă se modifică originea de calcul şi scara măsurărilor asupra variabilelor x şi y. Această proprietate ne dă posibilitatea să simplificăm considerabil calculul alegînd o origine de calcul convenabilă (x_0, y_0) şi o anumită unitate de măsură; după schimbarea de variabile

$$x = x_0 + h_1 u, \quad y = y_0 + h_2 v, \quad (h_1, h_2 > 0), \tag{5.10}$$

adică $u = (x - x_0)/h_1$, $v = (y - y_0)/h_2$, coeficientul empiric de corelaţie se calculează cu ajutorul formulei

$$r = \frac{\Sigma u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\Sigma u_i^2 - n(\bar{u})^2}\sqrt{\Sigma v_i^2 - n(\bar{v})^2}}, \tag{5.11}$$

unde

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\Sigma u_i, \quad \bar{v} = \frac{1}{n}\Sigma v_i, \quad \Sigma = \sum_{i=1}^{n}.$$

Exemplu de calcul al coeficientului de corelaţie. S-au efectuat $n = 26$ măsurări ale variabilelor x şi y. În primele trei coloane ale tabelului 5.1 se dau perechile de valori (x_i, y_i) obţinute în urma măsurărilor, precum şi numărul m_i de repetări ale perechii de valori (x_i, y_i). Pentru variabila x s-a ales originea de calcul $x_0 = 26{,}0$ (în tabel s-a indicat aceasta cu cifre îngroşate) şi coeficientul de scară $h_1 = 0{,}5$. Pentru variabila y s-au ales respectiv $y_0 = 0{,}50$ (indicat în tabel) şi $h_2 = 0{,}01$. În felul acesta $u_i = (x_i - 26{,}0)/0{,}5$, $v_i = (y_i - 0{,}50)/0{,}01$ iau numai valori întregi. Pentru calculul sumelor ce intervin în formula (5.11) fiecare termen se consideră de atîtea ori cît apare în tabel şi drept urmare pentru calcule se introduc coloanele um, $u^2 m$ şi vm, $v^2 m$, uvm.

În linia a doua a tabelului se dă originea în care se fac calculele, iar în ultima linie se calculează sumele necesare:

$$\Sigma^* m_i = n = 26, \quad \Sigma^* u_i m_i = -26, \quad \Sigma^* u_i^2 m_i = 248,$$

$$\Sigma^* v_i m_i = 22, \quad \Sigma^* v_i^2 m_i = 104, \quad \Sigma^* u_i v_i m_i = 87.$$

Tabelul 5.1

x	y	m	u	um	u^2m	v	vm	v^2m	uvm
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (3) (4)	(6) = =(4) (5)	(7)	(8) = = (3) (7)	(9) = = (7) (8)	(10) = = (5) (7)
23,0	0,48	2	−6	−12	72	−2	−4	8	24
24,0	**0,50**	4	−4	−16	64	0	0	0	0
24,5	0,49	3	−3	−9	27	−1	−3	3	9
24,5	**0,50**	2	−3	−6	18	0	0	0	0
25,0	0,51	1	−2	−2	4	1	1	1	−2
25,5	0,52	1	−1	−1	1	2	2	4	−2
26,0	0,49	2	0	0	0	−1	−2	2	0
26,0	0,51	1	0	0	0	1	1	1	0
26,0	0,53	2	0	0	0	3	6	18	0
26,5	**0,50**	1	1	1	1	0	0	0	0
26,5	0,52	1	1	1	1	2	2	4	2
27,0	0,54	2	2	4	8	4	8	32	16
27,0	0,52	1	2	2	4	2	2	4	4
28,0	0,53	3	4	12	48	3	9	27	36
Sumă		26	—	−26	248	—	22	104	87

Subliniem faptul că suma Σ^* se face nu după toate cele $n = 26$ măsurări efectuate, ca în formula (5.11), ci numai după perechile *distincte* (x_i, y_j), din care cauză apare şi necesitatea introducerii factorului m_{ij}. De exemplu, suma completă $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ se scrie aici sub forma $\sum^* u_i v_i m_{ij}$, iar valoarea medie

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{n}\sum {}^* u_i m_{ij}.$$

Pentru a face controlul calculelor se recomandă să se repete tot calculul cu o altă origine de calcul (a se compara cu calculul de la pag. 23).

Cu datele din tabelul indicat obţinem $\bar{u} = -1$, $\bar{v} = \frac{22}{26} = 0{,}846$, iar coeficientul empiric de corelaţie

$$r = \frac{87 - 26\ (-1)\ 0{,}846}{\sqrt{248 - 26\ (-1)^2}\ \sqrt{104 - 26\ (0{,}846)^2}} = 0{,}793.$$

Calculul coeficientului de corelaţie în cazul unui tabel de corelaţie. Dacă toată gama măsurărilor asupra variabilei x precum şi ale variabilei y se împart pe intervale de lungime egală,

rezultatele măsurărilor se scriu mai comod sub forma unui tabel de corelaţie („reţea de corelaţie") : în fiecare celulă a tabelului de corelaţie se trece numai numărul măsurărilor ale căror rezultate au căzut în celula considerată, iar pe linia şi coloana principale se trec mijloacele intervalelor corespunzătoare.

Aşa, de exemplu, avem tabelul 5.2. Odată întocmit un astfel de tabel, este comod să se calculeze mai departe totul direct pe tabel. Deoarece avem de-a face cu serii de date, grupate pe intervale, drept coeficienţi de scară h_1 şi h_2 urmează să se aleagă lungimile intervalelor corespunzătoare. Astfel, mijloacele intervalelor în noile variabile u şi v vor fi numerele intervalelor socotite de la un anumit interval mediu.

Tabelul 5.2

y \ x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	—	—	—	2	4
y_2	—	—	3	4	6
y_3	—	1	8	3	2
y_4	—	2	9	6	—
y_5	3	5	7	2	—
y_6	8	4	1	—	—

Exemplu. Să se calculeze coeficientul de corelaţie pe baza datelor din tabelul 5.2.

Soluţie. Tot calculul s-a făcut în tabelul 5.3, iar rezultatul este dat chiar în noile variabile u şi v. În colţul din dreapta sus al fiecărei celule a tabelului 5.3 s-au trecut produsele $u_i v_j$ necesare pentru calculul sumei $\sum uv = \sum^* u_i v_j m_{ij}$. Toate rezultatele calculelor s-au trecut apoi în liniile şi coloanele ce bordează tabelul de corelaţie.

În vederea evitării erorilor, calculul sumei $\sum^* u_i v_j m_{ij} = -110$ s-a făcut de două ori : pe linii şi coloane. Tot calculul se poate verifica repetîndu-l cu o altă origine de calcul. Cu ajutorul sumelor calculate $n = 80 = \sum^* m_{ij} = \sum_u m_u = \sum_v m_v$, calculăm

$$\sum u = \sum_u u\, m_u = 7, \quad \sum u^2 = \sum_u u^2 m_u = 121,$$

$$\sum v = \sum_v v\, m_v = 65, \quad \sum v^2 = \sum_v v^2 m_v = 239,$$

$$\sum uv = \sum^* u_i v_j m_{ij} = -110,$$

mediile aritmetice

$$\bar{u} = \frac{7}{80} = 0{,}0875, \quad \bar{v} = \frac{65}{80} = 0{,}8125$$

și coeficientul empiric de corelație

$$r = \frac{-110 - 80 \cdot 0{,}0875 \cdot 0{,}8125}{\sqrt{121 - 80\,(0{,}0875)^2}\,\sqrt{239 - 80\,(0{,}8125)^2}} = -\frac{115{,}69}{149{,}74} = -0{,}773.$$

Tabelul 5.3

v \ u	−2	−1	0	1	2	m_v	um_v	u^2m_v	uvm
−2				$2^{\vert -2}$	$4^{\vert -4}$	6	−12	24	−20
−1			$3^{\vert 0}$	$4^{\vert -1}$	$6^{\vert -2}$	13	−13	13	−16
0		$1^{\vert 0}$	$8^{\vert 0}$	$3^{\vert 0}$	$2^{\vert 0}$	14	0	0	0
1		$2^{\vert -1}$	$9^{\vert 0}$	$6^{\vert 1}$		17	17	17	4
2	$3^{\vert -4}$	$5^{\vert -2}$	$7^{\vert 0}$	$2^{\vert 2}$		17	34	68	−18
3	$8^{\vert -6}$	$4^{\vert -3}$	$1^{\vert 0}$			13	39	117	−60
m_u	11	12	28	17	12	80	65	239	
um_u	−22	−12	0	17	24	7			
u^2m_u	44	12	0	17	48	121			
uvm	−60	−24	0	2	−28				−110

5.1.2. *Intervale de încredere pentru coeficientul de corelație*

Chiar pentru variabile independente coeficientul empiric de corelație se poate întîmpla să fie diferit de zero ca urmare a împrăștierii aleatoare ale rezultatelor măsurărilor. De aceea înainte de toate urmează să verificăm semnificația coeficientului de corelație, adică să verificăm posibilitatea respingerii ipotezei privind necorelarea variabilelor considerate.

Semnificația coeficientului de corelație se verifică comparînd valoarea absolută a coeficientului empiric de corelație înmulțită cu $\sqrt{n-1}$ cu valoarea lui critică pentru un nivel de încredere $\mathscr{P}$ dat. Valorile critice ale produsului $|r|\sqrt{n-1} = H$ pentru diferite valori ale nivelului de încredere și diferite valori ale numărului de măsurări n sînt date în tabelul XII (Anexă, pag. 213). Dacă pentru coeficientul empiric de corelație r, produsul $|r|\sqrt{n-1}$ depășește valoarea critică H pentru un anumit $\mathscr{P}$, atunci cu nivelul de încredere $\mathscr{P}$ urmează să se respingă ipoteza asupra necorelării variabilelor considerate.

Exemple. În exemplul de la pag. 125 avem

$$n = 26, \quad r = 0{,}793, \quad \sqrt{n-1}\,|r| = 3{,}96,$$

care depășește semnificativ chiar și valoarea critică 3,037 pentru nivelul de încredere 0,999.

În exemplul de la pag. 127 avem $n = 80$, $r = -0{,}773$, $\sqrt{n-1}\,|r| = 6{,}86$, care de asemenea depășește valoarea critică 3,209 pentru nivelul de încredere 0,999.

În ambele exemple coeficientul de corelație este semnificativ, adică cu un nivel de încredere mai mare de 0,999 se poate considera că coeficientul de corelație teoretic este diferit de zero.

Intervalele de încredere ale coeficientului de corelație sînt complicate și deduse, în general, în cazul repartiției normale bidimensionale a variabilelor x și y. Pentru estimarea cu aproximație a adevăratei valori a coeficientului de corelație se folosesc nomograme (vezi S. A. Aivazean, *Statisticeskoe issledovanie zavisimostei* (*Studiul statistic al dependențelor*), „Metallurghia", 1968).

5.1.3. *Drepte de regresie*

Dreapta de regresie a lui y asupra lui x are ecuația

$$y - b = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a), \tag{5.12}$$

unde parametrii a, b, σ_x, σ_y și ρ au aceeași semnificație ca la punctul 5.1.1.

Dreapta de regresie a lui x asupra lui y are ecuația

$$x - a = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - b). \tag{5.13}$$

Coeficienții :

$$\beta_{y/x} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \beta_{x/y} = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \tag{5.14}$$

se numesc *coeficienți de regresie ai lui y asupra lui x* și respectiv *ai lui x asupra lui y*. Ambii coeficienți de regresie au același semn ca și coeficientul de corelație ρ. Ambele drepte de regresie trec prin punctul (a, b) — centrul repartiției. Dreptele de regresie y asupra lui x și x asupra lui y coincid numai atunci cînd $|\rho| = 1$, adică în cazul unei dependențe funcționale liniare între variabilele x și y.

Funcția liniară de x definită de ecuația (5.12) este funcția liniară de cea mai bună aproximație în medie pătratică a mărimii y în sensul în care a fost indicată la începutul punctului 5.1.1 (pag. 122). O afirmație analoagă este valabilă relativ la funcția liniară de y definită de ecuația (5.13).

Pe baza rezultatelor experimentului, parametrii ecuațiilor (5.12) și (5.13) se estimează cu ajutorul formulelor (5.6), (5.7), (5.9).

Aceste estimații determină *dreptele de regresie empirice*. Dreapta de regresie empirică a lui y asupra lui x are ecuația

$$y - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}), \tag{5.15}$$

iar

$$b_{y/x} = r \frac{s_y}{s_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n(\bar{u})^2} \cdot \frac{h_2}{h_1} \tag{5.16}$$

este *coeficientul de regresie empiric al lui y asupra lui x* (a se vedea notațiile de la punctul 5.1.1).

Parametrii funcției liniare (5.15) satisfac principiul celor mai mici pătrate pentru y : suma pătratelor abaterilor valorilor de observație y_i de la cele calculate cu ajutorul dreptei de regresie (5.15) este mai mică decît suma pătratelor abaterilor acestor valori de la orice altă dreaptă.

În felul acesta are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \bar{y} - r \frac{s_y}{s_x}(x_i - \bar{x}) \right]^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} [y_i - (Ax_i + B)]^2.$$

Cea mai mică sumă de pătrate ale abaterilor valorilor de observație y_i de la funcția liniară $Ax_i + B$, adică suma pătratrelor abaterilor acestor valori de la valorile $\bar{y} + r \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}_i)$ se poate exprima cu ajutorul coeficientului de corelație empiric r prin relația

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \bar{y} - r \frac{s_y}{s_x}(x_i - \bar{x}) \right]^2 = (n-1)\, s_y^2 (1 - r^2).$$

Dreapta de regresie empirică a lui x asupra lui y are ecuația

$$x - \bar{x} = r \frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}), \tag{5.17}$$

unde

$$b_{x/y} = r \frac{s_x}{s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n(\bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - n(\bar{v})^2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \tag{5.18}$$

este *coeficientul de regresie empiric al lui x asupra lui y*.

Pentru această dreptă principiul celor mai mici pătrate este satisfăcut în raport cu variabila x : suma pătratelor abaterilor valorilor de observație x_i de la cele calculate cu ajutorul dreptei de regresie (5.17) este mai mică decît

suma pătratelor abaterilor față de orice altă dreaptă. În felul acesta are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-\bar{x}-r\frac{s_x}{s_y}(y_i-\bar{y})\right]^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}[x_i-(Ay_i+B)]^2.$$

În acest caz

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-\bar{x}-r\frac{s_x}{s_y}(y_i-\bar{y})\right]^2=(n-1)\,s_x^2(1-r^2).$$

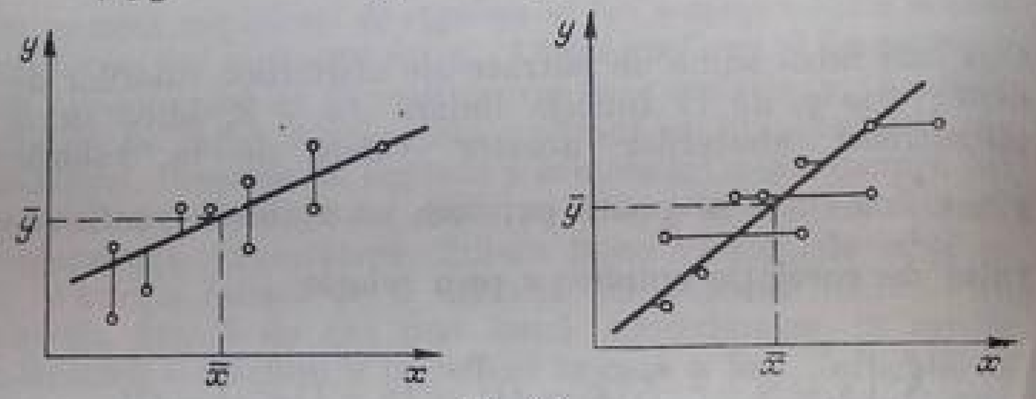

Fig. 5.2

În fig. 5.2 sînt indicate modurile cum sînt măsurate abaterile pentru dreptele de regresie considerate a lui y asupra lui x și a lui x asupra lui y.

Ambele drepte de regresie empirice trec prin centrul empiric al repartiției — punctul $(\bar{x}, \bar{y})$. Dreapta de regresie a lui x asupra lui y are întotdeauna panta mai mare (cu o înclinare mai mare față de axa Ox), decît dreapta de regresie a lui y față de x.

Coeficienții empirici de regresie $b_{y/x}$ și $b_{x/y}$ au același semn ca și coeficientul empiric de corelație r și sînt legați prin relația $b_{y/x}\,b_{x/y}=r^2$.

Exemple. Pentru exemplul de la pag. 125 avem

$$\bar{x}=26{,}0+0{,}5\,(-1)=25{,}5,$$

$$\bar{y}=0{,}50+0{,}01\cdot 0{,}846=0{,}50846;$$

coeficientul empiric de regresie a lui y asupra lui x

$$b_{y/x}=\frac{87-26\,(-1)\,0{,}846}{248-26\,(-1)^2}\cdot\frac{0{,}01}{0{,}5}=0{,}00978;$$

coeficientul empiric de regresie a lui x asupra lui y

$$b_{x/y}=\frac{87-26\,(-1)\,0{,}846}{104-26\,(0{,}846)^2}\cdot\frac{0{,}5}{0{,}01}=63{,}8.$$

Prin urmare, ecuațiile dreptelor empirice de regresie sînt

$$y-0{,}508=0{,}00978\;(x-25{,}5).$$

$$x-25{,}5=63{,}8\;(y-0{,}508).$$

Pentru exemplul de la pag. 127 avem

$$b_{v/u}=\frac{-110-80\cdot 0{,}0875\cdot 0{,}8125}{121-80(0{,}0875)^2}=-0{,}959,$$

$$b_{u/v}=\frac{-110-80\cdot 0{,}0875\cdot 0{,}8125}{239-80(0{,}8125)^2}=-0{,}621$$

și ecuațiile dreptelor empirice de regresie în coordonatele u, v:

$$v-0{,}8125=-0{,}959\;(u-0{,}0875),$$

$$u-0{,}0875=-0{,}621\;(v-8125).$$

Dreptele de regresie pentru ambele exemple sînt trasate în fig. 5.3 și 5.4.

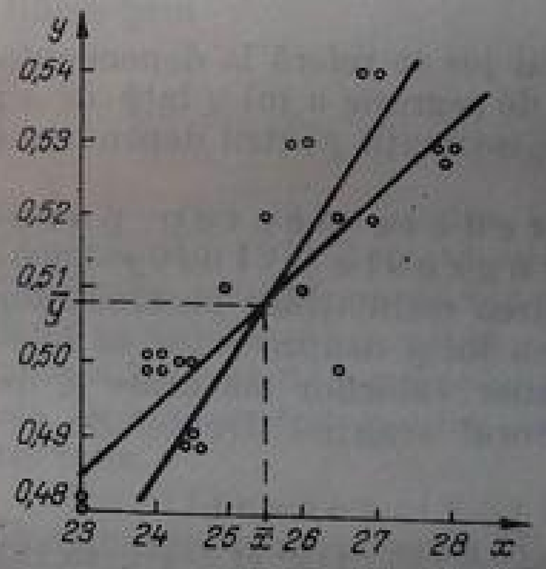

Fig. 5.3

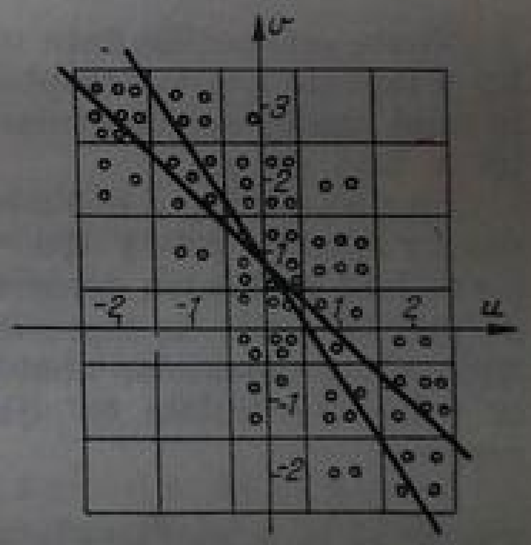

Fig. 5.4

Cazul măsurărilor de inegală precizie. Dacă împrăștierea punctelor experimentale în jurul dreptei se datorează erorilor aleatoare de măsurare, însă precizia de măsurare în diverse puncte este diferită, astfel încît fiecărui rezultat y_i i se atașează ponderea w_i și fiecare rezultat x_i este asociat cu ponderea w_i', urmează ca aceste ponderi să se introducă în formulele de calcul pentru mediile aritmetice și coeficienții empirici de regresie, păstrînd neschimbate ecuațiile de regresie sub forma (5.15) și respectiv (5.17). În această situație formulele capătă forma :

$$\bar{x} = \frac{1}{\Sigma w_i} \Sigma w_i x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{\Sigma w_i} \Sigma w_i y_i,\ b_{y/x} = \frac{\Sigma w_i x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} \Sigma w_i}{\Sigma w_i (x_i - \bar{x})^2},$$

unde $\Sigma = \sum_{i=1}^{n}$ pentru regresia lui y asupra lui x, și

$$\bar{x} = \frac{1}{\Sigma w_i'} \Sigma w_i' x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{\Sigma w_i'} \Sigma w_i' y_i,\ b_{x/y} = \frac{\Sigma w_i' x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} \Sigma w_i'}{\Sigma w_i' (y_i - \bar{y})^2},$$

unde $\Sigma = \sum_{i=1}^{n}$ pentru regresia lui x asupra lui y.

5.1.4. *Intervale de încredere pentru dreptele de regresie*

Toate estimațiile date mai jos se referă la dependența lui y față de x și la dreapta de regresie a lui y față de x; în mod analog se construiesc estimații pentru dependența lui x față de y.

Intervale de încredere pentru parametrii dreptei de regresie a lui y asupra lui x. Pentru construirea estimațiilor parametrilor dreptei teoretice de regresie a lui y asupra lui x se folosește suma pătratelor abaterilor valorilor măsurate y_i de la valorile calculate cu ajutorul ecuației dreptei de regresie :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \bar{y} - r \frac{s_y}{s_x} (x_i - \bar{x}) \right]^2 = (n-1)\, s_y^2\, (1 - r^2). \quad (5.19)$$

Se presupune că toate erorile de măsurare sînt independente și urmează o repartiție normală cu media 0 și dispersia σ^2 (această ipoteză stă la baza tuturor estimațiilor ce urmează în paragraful de față).

Dacă ecuația dreptei teoretice de regresie se scrie sub forma

$$y = b + \beta_{y/x} (x - a),$$

atunci limitele de încredere pentru parametrul b sînt

$$\bar{y} \pm t \sqrt{\frac{s}{(n-2)\, n}} = \bar{y} \pm t \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{s_y}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - r^2}, \quad (5.20)$$

iar pentru coeficientul de regresie $\beta_{y/x}$:

$$b_{y/x} \pm t \sqrt{\frac{S}{n-2}} \frac{1}{s_x \sqrt{n-1}} = b_{y/x} \pm t \frac{s_y \sqrt{1 - r^2}}{s_x \sqrt{n-2}}, \quad (5.21)$$

unde valorile factorului $t = t(\mathscr{P}, k)$ se iau din tabelul IV (Anexă, pag. 197) a repartiției Student pentru numărul de grade de libertate $k = n - 2$.

Intervale de estimație a abaterii dreptei teoretice de regresie de la cea empirică. Pentru o valoare fixată $x = x_0$ limitele de încredere pentru dreapta teoretică de regresie se definesc prin

$$\bar{y} + b_{y/x} (x_0 - \bar{x}) \pm t \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{n (x_0 - \bar{x})^2}{(x-1)\, s_x^2}},$$

unde $t = t(\mathscr{P}, k)$ se ia din tabelul IV pentru $k = n - 2$ (Anexă, pag. 197). Această estimație se înrăutățește semnificativ pe măsură ce ne îndepărtăm de media aritmetică $\bar{x}$. În particular, din această cauză este periculos să se extrapoleze dreapta de regresie la capetele intervalului de valori ale argumentului, pentru care s-a obținut dreapta de regresie.

Verificarea ipotezei de liniaritate. Pentru orice caracteristică a dependenței lui y de x, dreapta de regresie a lui y asupra lui x dă cea mai bună aproxi-

maţie liniară prin metoda celor mai mici pătrate. Dar din aceasta nu rezultă că valoarea medie $\bar{y}|_x$, considerată pentru fiecare valoare a lui x, este situată pe o dreaptă (mai exact, abaterile de la o dreaptă sînt condiţionate numai de oscilaţiile acestor medii).

Pentru verificarea ipotezei că adevărata valoare medie $\bar{y}|_x$ pentru fiecare x este situată pe o dreaptă se procedează în modul următor. Întreaga gamă de valori măsurate ale variabilei x se împarte în l intervale (l trebuie să fie mai mare ca 8 –10) şi pentru fiecare interval de rang j cu centrul în punctul x_j se calculează media aritmetică condiţionată $\bar{y}|_{x_j}$ şi dispersia empirică condiţionată $s^2_{y|x_j}$ cu ajutorul formulelor

$$\bar{y}|_{x_j} = \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{m_j} y_{ij}, \quad s^2_{y|x_j} = \frac{1}{m_j - 1}\sum_{i=1}^{m_j}(y_{ij} - \bar{y}|_{x_j})^2,$$

unde m_j este numărul de puncte (x_{ij}, y_{ij}) ale căror abscise au căzut în cel de al j-lea interval. După aceasta se calculează raportul

$$F = \frac{\dfrac{1}{l-2}\displaystyle\sum_{j=1}^{l} m_j\left[\bar{y}|_{x_j} - \bar{y} - r\frac{s_y}{s_x}(x_j - \bar{x})\right]^2}{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{l}(m_j - 1)\, s^2_{y|x_j}} \qquad (5.22)$$

şi se compară cu valoarea critică a acestui raport, determinată din tabelul VII (Anexă, pag. 197) pentru numărul de grade de libertate $k_1 = l-2$, $k_2 = n-l$. Dacă valoarea calculată a raportului (5.22) depăşeşte valoarea critică pentru un anumit $\mathscr{P}$, atunci cu nivelul de încredere $\mathscr{P}$ se respinge ipoteza privind caracterul de liniaritate al dependenţei lui y faţă de x. În caz contrar nu avem motive să respingem ipoteza şi, prin urmare, aceasta se acceptă.

Menţionăm faptul că raportul (5.22) se poate scrie sub forma

$$F = \frac{(n-l)\ (\eta^2_{y/x} - r^2)}{(l-2)\ (1 - \eta^2_{y/x})},$$

unde $\eta_{y/x}$ este raportul de corelaţie (vezi punctul 5.2.1).

Aprecierea valorilor „excepţionale”*. Dacă printre datele experimentale se descoperă una „excepţională”, „suspectă”, ce diferă mult de celelalte puncte, problema excluderii acestei valori se rezolvă în modul următor.

Se calculează dispersiile empirice şi coeficientul de corelaţie corespunzătoare tuturor punctelor:

$$s^2_x,\ s^2_y,\ r$$

şi pentru toate punctele cu excepţia celui „suspect”:

$$\tilde{s}_x,\quad \tilde{s}_y,\quad \tilde{r}.$$

Raportul

$$R = \frac{(n-1)^2 \tilde{s}^2_x \tilde{s}^2_y\,(1 - \tilde{r}^2)}{n^2 s^2_x s^2_y\,(1 - r^2)} \qquad (5.23)$$

se compară cu valoarea lui critică minimă admisibilă, obţinută din tabelul XIII (Anexă, pag. 214).

În tabelul XIII valorile minime admisibile ale raportului R sînt date pentru diferite nivele de încredere şi diferite valori ale numărului n de date. Dacă pentru un nivel de încredere $\mathscr{P}$ dat, valoarea calculată a raportului (5.23) este mai mică decît valoarea minimă admisibilă corespunzătoare a lui R, atunci valoarea „suspectă” se consideră o eroare grosolană cu nivelul de încredere $\mathscr{P}$ şi se exclude din prelucrarea ulterioară a datelor experimentale. În caz contrar valoarea respectivă se păstrează pentru prelucrare.

5.2. Corelaţie neliniară

5.2.1. *Raportul de corelaţie*

În cazul unei corelaţii neliniare, drept măsură a dependenţei, adică drept măsură a concentrării punctelor experimentale în jurul dreptelor de regresie se ia raportul

* Valori ce diferă semnificativ de celelalte valori obţinute în setul de măsurări (*N. T.*).

de corelație $\eta_{y/x}$ pentru dependența lui y în funcție de x sau $\eta_{x/y}$ pentru dependența lui x în funcție de y.

Rapoartele de corelație se calculează cu ajutorul relațiilor

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\sum_{j=1}^{l} m_j (\bar{y}|_{x_j} - \bar{y})^2}{(n-1)\, s_y^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{l} (m_j - 1)\, s^2_{y|x_j}}{(n-1)\, s_y^2}. \quad (5.24)$$

$$\eta^2_{x/y} = \frac{\sum_{j=1}^{l'} m'_j (\bar{x}|_{y_j} - \bar{x})^2}{(n-1)\, s_x^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{l'} (m'_j - 1)\, s^2_{x|y_j}}{(n-1)\, s_x^2}, \quad (5.25)$$

unde notațiile au aceeași semnificație ca la punctul 5.1.4, iar m'_j și l' au aceeași semnificație pentru x ca și m_j și l pentru y.

Raportul de corelație satisface inegalitățile

$$0 \leqslant |r| \leqslant \eta_{y/x} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant |r| \leqslant \eta_{x/y} \leqslant 1. \quad (5.26)$$

Egalitatea raportului de corelație cu unitatea: $\eta_{y/x} = 1$ indică o dependență funcțională între variabilele x și y. Din egalitatea cu zero a raportului de corelație: $\eta_{y/x} = 0$ rezultă necorelarea variabilelor x și y. Remarcăm însă faptul că din $\eta_{y/x} = 0$ nu rezultă și $\eta_{x/y} = 0$.

5.2.2. *Curbe de regresie*

Construirea curbelor de regresie se face prin metoda celor mai mici pătrate. De obicei ne mărginim la o dependență parabolică de grad mic, adică polinoame de gradul doi sau trei.

Ecuația curbei de regresie este comod să se pună sub forma unui polinom descompus după polinoame ortogonale Cebișev (punctul 3.2.3):

$$y = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_s p_s(x).$$

Adevăratele valori ale parametrilor sînt situate cu nivelul de încredere $\mathscr{P}$ în intervalul ale cărei limite sînt

$$b_j \pm t_j \sqrt{\frac{S}{(n-j-1)\, H_j}},$$

unde $t_j = t(\mathscr{P}, k)$ se iau din tabelul IV (Anexe, pag. 197) pentru numărul de grade de libertate $k = n - j - 1$,

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - b_0 p_0(x_i) - b_1 p_1(x_i) - \ldots - b_s p_s(x_i)]^2$$

fiind suma pătratelor abaterilor punctelor experimentale de la cele calculate, iar

$$H_j = \sum_{i=1}^{n} p_j^2(x_i).$$

De la început presupunem că măsurările sînt de egală precizie, independente și cu o repartiție normală a erorilor.

Spre deosebire de cazurile considerate în cap. 3, în cazul de față nu se aleg dinainte punctele x_i (în virtutea împrăștierii necontrolate atît a variabilei y, cît și a variabilei x). Prin urmare, nu se poate simplifica calculul alegînd puncte echidistante sau măcar dispuse simetric față de media aritmetică $\bar{x}$. Din cauza aceasta nu se mai pot utiliza tabele pentru polinoamele ortogonale Cebîșev (întocmite în prealabil), urmînd să se determine aceste polinoame pentru fiecare problemă considerată.

5.3. Corelație liniară multiplă

Noțiunea de corelație liniară între două variabile considerată în paragraful 5.1 poate fi extinsă la cazul unui număr de mai multe variabile. În cele ce urmează se dau formulele necesare în cazul a trei variabile x, y, z; pentru prescurtarea celor scrise se dau numai formulele referitoare la regresia empirică a variabilei z asupra variabilelor x și y.

5.3.1. *Planul de regresie*

Planul de regresie al lui z asupra variabilelor (x, y) are ecuația

$$z - \bar{z} = b_{z/x}(x - \bar{x}) + b_{z/y}(y - \bar{y}), \quad (5.27)$$

unde coeficienții de regresie $b_{z/x}$ și $b_{z/y}$ se determină cu ajutorul coeficienților de corelație dintre perechile de variabile x și y, x și z, y și z, în modul următor :

$$\left.\begin{aligned} b_{z/x} &= \frac{r_{xz} - r_{xy}\, r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}\,\frac{s_z}{s_x}, \\ b_{z/y} &= \frac{r_{yz} - r_{xy}\, r_{xz}}{1 - r_{xy}^2}\,\frac{s_z}{s_y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Și în cazul de față coeficienții de corelație dintre perechile de variabile amintite au același sens ca și în § 5.1 și anume

$$r_{xy} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{(N-1)\, s_x\, s_y}, \quad r_{xz} = \frac{\Sigma\,(x_k - \bar{x})\,(z_k - \bar{z})}{(N-1)\, s_x\, s_z},$$

$$r_{yz} = \frac{\Sigma\,(y_k - \bar{y})\,(z_k - \bar{z})}{(N-1)\, s_y\, s_z} \quad \left(\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\right),$$

unde N este numărul total de date experimentale, adică numărul de puncte (x_k, y_k, z_k), iar s_x, s_y, s_z sînt dispersiile empirice :

$$s_x^2 = \frac{\Sigma\,(x_k - \bar{x})^2}{N-1}, \quad s_y^2 = \frac{\Sigma\,(y_k - \bar{y})^2}{N-1}, \quad s_z^2 = \frac{\Sigma\,(z_k - \bar{z})^2}{N-1}.$$

5.3.2. *Coeficienții multiplu și parțial de corelație*

Ca măsură a dependenței dintre variabila z și variabilele x, y se consideră *coeficientul multiplu de corelație*

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{yz}^2 - 2 r_{xy}\, r_{xz}\, r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{(N-1)\, s_z^2} \sum_{k=1}^{N} [z_k - \bar{z} - b_{z/x}\,(x_k - \bar{x}) - b_{z/y}\,(y_k - \bar{y})]^2}.$$

Coeficientul multiplu de corelație R este totdeauna cuprins între 0 și 1. Dacă variabila z nu depinde de variabilele x și y, valoarea teoretică a coeficientului R este egală cu zero. Dacă valoarea teoretică a lui R este egală cu zero (deci, practic, coeficientul multiplu de corelație este suficient de mic), atunci între variabila z și variabilele x, y nu există o corelație liniară (însă poate să fie una neliniară).

Coeficientul multiplu de corelație este egal cu unu dacă și numai dacă toate datele experimentale se situează în planul de regresie (teoretic valoarea lui R este egală cu unu numai în cazul unei dependențe funcționale liniare a variabilei z de variabilele x și y).

Pentru studiul influenței numai a unuia dintre factori, de exemplu a factorului caracterizat de variabila x asupra celui exprimat prin variabila z, adică pentru studiul corelației dintre x și z după înlăturarea variației determinate de influența variabilei y, se introduce coeficientul de corelație *parțial* al variabilelor x și z în raport cu variabila y :

$$r_{xz/y} = \frac{r_{xz} - r_{xy}\, r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}\,\sqrt{1 - r_{yz}^2}}.$$

În mod analog se determină coeficienții de corelație $r_{xy/z}$ și $r_{yz/x}$.

UNELE PROBLEME DE ANALIZĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

6.1. Integrare numerică

6.1.1. *Metoda trapezelor, estimarea erorii*

Metoda trapezelor se aplică, de obicei, în cazul în care valorile funcției sînt măsurate pentru valori echidistante ale agrumentului, adică reprezentate tabelar cu un pas constant h :

x	$y = f(x)$
$x_0 = a$	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1
$x_2 = x_1 + h$	y_2
. . .	. . .
$x_n = b = x_{n-1} + h$	y_n

Utilizînd metoda trapezelor, drept valoare aproximativă a intergalei

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

se ia expresia

$$T_h = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right), \tag{6.2}$$

adică se pune $I \approx T_h$. Interpretarea geometrică a metodei trapezelor este dată în fig. 6.1 : aria trapezului curbiliniu

se înlocuiește cu suma ariilor trapezelor dreptunghice. În felul acesta, așa cum se vede din fig. 6.1, valorile măsurate ale funcției y_k pot să nu coincidă cu valorile funcției $f(x)$ în punctele x_k, deoarece valorile funcției obținute în urma măsurărilor conțin erorile experimentale.

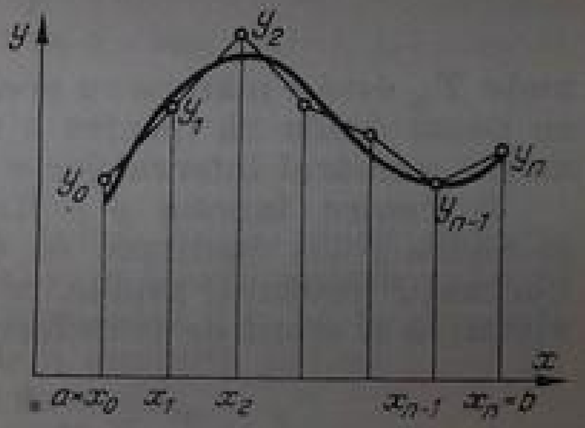

Fig. 6.1

Eroarea totală de calcul a integralei după metoda trapezelor se estimează ca suma a două erori : *eroarea de trunchiere* (eroarea analitică), introdusă prin înlocuirea trapezelor curbilinii cu trapezele dreptunghice, și *eroarea de rotunjire* (eroarea empirică), introdusă de erorile de măsurare ale valorilor funcției.

Eroarea de trunchiere se estimează în funcție de gradul de netezire al funcției $f(x)$ în modul următor.

1) Pentru funcția $y = f(x)$ continuă pe intervalul $[a, b]$

$$I - T_h \to 0, \text{ pentru } h \to 0,$$

ceea ce asigură calculul integralei cu o precizie oricît de mare fixată, pentru un pas h suficient de mic.

2) Pentru funcția $y = f(x)$ cu derivata de ordinul al doilea $f''(x)$ continuă pe intervalul $[a, b]$

$$I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)\,f''(c)\,h^2, \tag{6.3}$$

unde c este un punct oarecare din intervalul (a, b), sau

$$I - T_h = Ah^2 + o(h^2), \tag{6.4}$$

unde $A = -\frac{1}{12}\,[f'(b) - f'(a)] = \text{const}$, $o(h^2)$ fiind o funcție astfel încît $\frac{o(h^2)}{h^2} \underset{h\to 0}{\to} 0$.

O estimație aproximativă a erorii de trunchiere este dată de formula

$$I - T_h \approx \frac{1}{3}(T_h - T_{2h}), \tag{6.5}$$

unde T_{2h} este o mărime cu aceeași structură ca și T_h, însă cu pasul dublu $2h$ (pentru a fi posibilă o astfel de estimație, numărul intervalelor n trebuie să se ia par).

3) Pentru functia $y = f(x)$ cu derivata de ordinul al doilea $f''(x)$ continuă, cu condiția că funcția nu are fluctuații (oscilații) rapide, se alcătuiește estimația aproximativă a erorii de trunchiere, date de formula

$$I - T_h \approx -\frac{1}{12}(b-a)\,\overline{\Delta^2 y}, \tag{6.6}$$

unde $\overline{\Delta^2 y}$ este media aritmetică a diferențelor de ordinul al doilea $\Delta^2 y_{-1}, \Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^2 y_{n-1}$ (a se vedea punctul 6.3.5). Ultima estimație urmează să se aplice cu prudență; de obicei ea se utilizează numai în situațiile în care diferențele de ordinul al doilea variază lent, iar diferențele de ordinul al patrulea sînt suficient de mici.

Eroarea de rotunjire se estimează în modul următor. În ipoteza că măsurarea tuturor valorilor funcției y_i se face independent de la o măsurare la alta și cu aceeași precizie, anume cu eroarea medie pătratică σ, eroarea medie pătratică a mărimii T_h va fi $h\sqrt{n-1/2}\,\sigma$. Dacă erorile de măsurare urmează mai mult sau mai puțin o repartiție normală (cu media 0 și dispersia σ^2), atunci, conform regulii trei sigma, eroarea de rotunjire nu depășește valoarea $3(b-a)\sigma/\sqrt{n}$ (siguranța acestei concluzii se poate considera ca suficientă pentru n suficient de mare).

Observație. Dacă valorile funcției nu se mai măsorară în puncte echidistante, atunci metoda trapezelor se poate aplica sub forma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h_i,$$

unde $h_i = x_{i+1} + x_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

În această situație eroarea de trunchiere în valoare absolută nu depășește valoarea

$$\frac{1}{12}(b-a)\,M_2 h^2,$$

unde $M_2 = \max |f''(x)|$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$, $h = \max h_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$

6.1.2. *Metoda lui Romberg*

Metoda lui Romberg se aplică numai dacă valorile funcției de sub integrală $f(x)$ se măsoară pentru valorile argumentului care împart segmentul $[a, b]$ în n părți egale, iar n este multiplu de o anumită putere a lui 2: $n = m\,2^k$ (m și k sînt numere naturale).

Metoda lui Romberg constă în precizarea succesivă a valorilor aproximative ale integralei calculate după metoda trapezelor (punctul 6.1.1) cu un anumit pas h, prin utilizarea rezultatului calculului după aceeași regulă cu pasul dublu $2h$. Acest lucru permite să se scoată maximum de informație din datele ce le avem la dispoziție și să se calculeze integrala cu o precizie considerabil mai mare, decît cea obținută prin metoda trapezelor cu același pas.

Spre deosebire de notațiile utilizate la punctul 6.1.1, se folosesc aici următoarele notații:

T_i — mărimea de forma (6.2) cu pasul h_i;

$h_0 = (b-a)/m$ — pasul inițial,

$$h_{i+1} = \frac{h_i}{2}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Mai întîi se calculează o valoare inițială aproximativă a integralei după metoda trapezelor cu pasul h_0:

$$T_0 = h_0\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h_0) + \ldots + f(a+(m-1)h_0) + \frac{f(b)}{2}\right] = \tag{6.7}$$

$$= h_0\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} f(a+jh_0)\right].$$

După aceea se calculează expresia

$$T_1 = h_1\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h_1) + \ldots + f(a+(2m-1)h_1) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

pentru a folosi numai valorile suplimentare ale funcției $f(x)$ în punctele intermediare $a+h_1$, $a+3h_1$, ..., $a+(2m-1)h_1$. În acest scop se calculează termenul de corecție

$$V_0 = h_0 \sum_{j=1}^{m} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h_0\right] \tag{6.8}$$

și apoi se află

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_0 + V_0). \tag{6.9}$$

Cu ajutorul celor două valori aproximative aflate ale integralei, T_1 cu pasul h_1 și T_0 cu pasul dublu $h_0 = 2h_1$, se calculează o valoare aproximativă mai bună

$$S_1 = T_1 + \frac{1}{3}(T_1 - T_0) = \frac{1}{3}(4T_1 - T_0). \tag{6.10}$$

Aproximația S_1 constituie *metoda lui Simpson* $I \approx S_1$; forma expresiei S_1 se obișnuiește să se scrie astfel:

$$S_1 = \frac{1}{3}h_1\,[f(a) + 4f(a+h_1) + 2f(a+2h_1) + \ldots \\ \ldots + 4f(a+(2m-1)h_1) + f(b)]. \tag{6.11}$$

Pentru o funcție $f(x)$ cu derivată de ordinul al patrulea $f^{(4)}(x)$ continuă pe segmentul $[a, b]$ eroarea de trunchiere la aplicarea metodei lui Simpson este egală cu

$$I - S_1 = -\frac{1}{180}(b-a) f^{(4)}(c) h_1^4, \tag{6.12}$$

unde $a<c<b$. Se vede imediat că în acest caz eroarea de trunchiere are deja ordinul lui h_1, în timp ce pentru metoda

trapezelor eroarea de trunchiere este de ordinul lui h_1^2. Eroarea de rotunjire după regula trei sigma este dată de expresia

$$3\,\frac{\sqrt{20m+2}}{6m}(b-a)\,\sigma \approx 3\cdot\frac{1}{6}\,\frac{(b-a)\sigma}{\sqrt{2m}},$$

adică depășește eroarea de rotunjire în cazul metodei trapezelor însă nu mai mult de 6% (în condițiile menționate la punctul 6.1.1 referitor la erorile de măsurare ale valorilor funcției).

Dacă $k > 2$, adică numărul de intervale este multiplu de 4, atunci se calculează mai departe un nou termen de corecție

$$V_1 = h_1 \sum_{j=1}^{2m} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h_1\right]$$

și noile aproximații, după metoda trapezelor

$$T_2 = \frac{1}{2}(T_1 + V_1)$$

și după metoda lui Simpson

$$S_2 = T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1) = \frac{1}{3}(4T_2 - T_1).$$

Cu cele două valori aproximative aflate pentru integrală, S_2 cu pasul h_2 și S_1 cu pasul dublu $h_1 = 2h_2$, se calculează aproximația mai bună

$$R_2 = S_2 + \frac{1}{15}(S_2 - S_1) = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1). \tag{6.13}$$

Pentru noua formulă $I \approx R_2$ eroarea de trunchiere are deja ordinul lui h_2^6 (dacă funcția $f(x)$ are derivată de ordinul al șaselea continuă pe segmentul $[a, b]$); eroarea de rotunjire în acest caz depășește eroarea de rotunjire obținută la metoda lui Simpson, însă nu mai mult de 6%.

Continuarea acestui procedeu pentru $k \geqslant 3$ este prezentată în *schema lui Romberg* (vezi tabelul 6.1). În această

Tabelul 6.1

h	T	S	R	Q	...
h_0	T_0				
$h_1 = \frac{1}{2} h_0$	$T_1 \to S_1$				
$h_2 = \frac{1}{2} h_1$	$T_2 \to S_2 \to R_2$				
$h_3 = \frac{1}{2} h_2$	$T_3 \to S_3 \to R_3 \to$			Q_3	
...	...		...	...	...

schemă, după ce s-au calculat toate mărimile din linia a i-a, se trece la calculul celor din linia a $(i+1)$-a după formulele

$$\left.\begin{aligned} T_{i+1} &= \frac{1}{2}(T_i + V_i),\ V_i = h_i \sum_{j=1}^{2^i m} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right) h_i\right] \\ S_{i+1} &= \frac{2^2 T_{i+1} - T_i}{2^2 - 1}, \qquad R_{i+1} = \frac{2^4 S_{i+1} - S_i}{2^4 - 1} \\ Q_{i+1} &= \frac{2^6 R_{i+1} - R_i}{2^6 - 1}, \quad \ldots \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Procesul calculării se încheie atunci, cînd la două aproximații succesive coincid cifrele de rangul dorit sau cînd se epuizează toate rezultatele măsurărilor asupra valorilor funcției pe care le avem la dispoziție.

Toate mărimile ce apar în schema lui Romberg ne dau valori aproximative ale integralei (6.1), însă cu precizie diferită. Pentru liniile corespunzătoare pașilor $h_i = h_0/2^i = (b-a)/(2^i m)$, erorile de trunchiere au ordinul lui h_i^2 pentru T_i, h_i^4 pentru S_i, h_i^6 pentru R_i etc. (ordinul crește cu două unități prin trecerea la fiecare din coloa-

nele succesive în ipoteza existenței derivatei de ordinul corespunzător a funcției $f(x)$ și a continuității ei pe segmentul $[a, b]$). Pentru aceeași linie eroarea de rotunjire pentru valoarea T_i este egală cu $3(b-a)\sigma/\sqrt{2^i m}$ și crește aproximativ cu 5—6% prin trecere la fiecare coloană următoare.

Pentru funcțiile analitice și, în general, funcțiile ale căror derivate sînt lent crescătoare (tip polinoame), șirul valorilor $T_0, S_1, R_2, Q_3, \ldots$ *de pe diagonala* schemei lui Romberg tinde către integrala (6.1) semnificativ mai rapid, decît șirul $T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots$ Însă pentru funcții care nu au derivate de ordin superior (netede pe porțiuni) sau pentru funcții cu derivate rapid crescătoare, către integrala (6.1) se poate să conveargă mai rapid șirul $T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots$ sau $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ș.a.m.d.

Exemplu. Se consideră funcția $y = f(x)$ dată în primele două coloane ale tabelului 6.2 în 13 puncte echidistante din segmentul $[0{,}4\,;\ 1{,}6]$; erorile valorilor funcției nu depășesc 10^{-4}. Să se calculeze integraia funcției $f(x)$ pe intervalul considerat cu o precizie de 10^{-4}.

Tabelul 6.2

x	y	Pentru T_0	Pentru V_0	Pentru V_1
0,4	0,4942	0,2471		
0,5	0,7555	.....	.....	→ 0,7555
0,6	1,0523	.....	→1,0523	
0,7	1,3625	.....	.....	→ 1,3625
0,8	1,6542	1,6542		
0,9	1,8890	.....	.....	→ 1,8890
1,0	2,0317	.....	→2,0317	
1,1	2,0629	.....	.....	→ 2,0629
1,2	1,9866	1,9866		
1,3	1,8274	.....	.....	→ 1,8274
1,4	1,6193	.....	→1,6193	
1,5	1,3937	.....	.....	→ 1,3937
1,6	1,1736	0,5868		

Soluție. Cum intervalul de integrare este împărțit în 12 părți egale cu pasul $h = 0{,}1$, vom alege drept pas inițial $h_0 = 0{,}4$. Calculăm cu acest pas aproximația inițială după metoda trapezelor *

$$T_0 = 0{,}4\,(0{,}2471 + 1{,}6542 + 1{,}9866 + 0{,}5868) = 1{,}78988.$$

* Pentru ca datele calculate să apară mai evident, acestea au fost puse în coloane cu capetele „pentru T_0", „pentru V_0", „pentru V_1".

Termenul de corecție

$$V_0 = 0{,}4\ (1{,}0523 + 2{,}0317 + 1{,}6193) = 1{,}88132.$$

Următoarea valoare aproximativă după metoda trapezelor cu pasul $h_1 = 0{,}2$:

$$T_1 = \frac{1}{2}\ (1{,}78988 + 1{,}88132) = 1{,}83560.$$

Cu aceste date calculăm prima aproximație după metoda lui Simpson:

$$S_1 = 1{,}83560 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04572 = 1{,}85084.$$

Cum precizia cerută evident nu a fost atinsă, calculăm noul termen de corecție

$$V_1 = 0{,}2\ (0{,}7555 + 1{,}3625 + 1{,}8890 + 2{,}0629 + 1{,}8274 + 1{,}3937) = 1{,}85820$$

și noua valoare aproximativă după metoda trapezelor cu pasul $h_2 = 0{,}1$:

$$T_2 = \frac{1}{2}\ (1{,}83560 + 1{,}85820) = 1{,}84690.$$

Continuarea calculelor după metoda lui Romberg este dată în tabelul 6.3 (pentru comoditatea calculelor între coloane sînt trecute diferențele valorilor din tabel).

Tabelul 6.3

h	T	S	R
0,4	1,78988		
		4572	
0,2	1,83560		1,85084
		1130	−17
0,1	1,84690		1,85067	1,85066

Diferența dintre ultimele două rezultate este de numai 10^{-5}, ceea ce ne permite să considerăm că eroarea de trunchiere este mai mică decît 10^{-3}. (Remarcăm faptul că în acest exemplu nu am mai fi putut să urmărim precizia, deoarece s-au epuizat datele.)

Să estimăm eroarea de rotunjire. Cum din datele problemei erorile cu care sînt date valorile funcției nu depășesc 10^{-4}, putem pune $3\sigma = 10^{-4}$. Lungimea intervalului de integrare este egală cu 1,2. Pentru un pas $h = 0{,}1$ numărul intervalelor $n = 12$. De aceea eroarea de rotunjire se estimează prin mărimea $3(b-a)\,\sigma/\sqrt{n} = 0{,}35\cdot 10^{-4}$ pentru metoda trapezelor T;

$0{,}37\cdot 10^{-4}$ pentru metoda lui Simpson S; $0{,}40\cdot 10^{-4}$ pentru metoda lui Romberg R, care se încadrează de asemenea în limitele admise.

În felul acesta cu o precizie de 10^{-4} se poate considera că

$$\int_{0,4}^{1,6} f(x)\,dx = 1{,}8507.$$

Ajustarea pentru integrare. Pentru funcții definite experimental nu trebuie efectuată o ajustare a rezultatelor experimentale pînă la integrarea numerică, deoarece însăși integrarea constituie o ajustare parțială și înlătură „zgomotul" experimentului nu mai rău, decît poate fi făcut prin modalitățile speciale expuse în § 4.4.

Controlul calculelor. Dacă funcția de sub integrală este dată printr-o formulă, atunci sursa principală a erorilor pentru calcul o constituie calculul valorilor funcției în punctele date. Această parte a calculelor se poate controla cu ajutorul tabelelor diferențelor funcției de sub integrală (vezi punctul 6.3.5). Calculul mărimilor din schema lui Romberg se controlează prin repetarea tuturor calculelor.

Prezența unei părți „inutile" de segment. Dacă punctele echidistante în care se măsoară valorile funcției $f(x)$ împart segmentul $[a, b]$ în n părți egale, însă n nu este multiplu de 2^k, atunci se dovedește util să împărțim intervalul de integrare în două părți, pe partea principală a segmentului să se aplice metoda lui Romberg, iar pe cealaltă parte oricare altă metodă. În acest caz trebuie să avem grijă ca să calculăm integrala pe partea rămasă a intervalului cu aceeași precizie ca și pe partea principală. Fie de exemplu segmentul $[a, b]$, care se împarte în 13 părți egale, astfel încît $h = (b-a)/13$, și fie funcția $f(x)$ mai netedă pe prima porțiune a acestui interval. Să scriem integrala căutată sub forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^b f(x)\,dx$$

și să calculăm cea de a doua integrală după metoda lui Romberg. Să considerăm ca și în exemplul de

mai sus aproximația S_2 după metoda lui Simpson, luată cu suficientă precizie, astfel încît se poate admite că eroarea de trunchiere obținută este de ordinul lui h^4. Atunci și pentru integrala pe porțiunea $[a, a+h]$ trebuie să se aleagă o astfel de formulă de integrare numerică, care să aibă eroarea de trunchiere de ordinul lui h^4 (așa, de exemplu, metoda trapezelor nu este utilă în acest caz). În acest scop se poate recomanda formula

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx h\left[\frac{5}{12}f(a)+\frac{2}{3}f(a+h)-\frac{1}{12}f(a+2h)\right],$$

ce utilizează o informație suplimentară asupra valorilor funcției $f(a+2h)$ și care are eroarea $\frac{1}{24}f'''(c)h^4$, unde $a<c<a+2h$.

În general, pentru formule de integrare numerică cu suficientă precizie pentru astfel de segmente urmează să se utilizeze informații suplimentare asupra valorilor funcției $f(x)$ în punctele situate în afara segmentului considerat. De exemplu, dacă se cunoaște valoarea funcției $f(x)$ în punctul $a-h$, se poate folosi formula

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx \approx h\left[\frac{13}{24}(f(a)+f(a+h))-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{24}(f(a-h)+f(a+2h))\right]$$

cu eroarea egală cu $\frac{11}{720}f^{(4)}(c)h^5$, unde $a-h<c<a+2h$.

Formule de tipul acesta sînt date la sfîrșitul punctului 6.1.3.

6.1.3. *Integrarea funcțiilor cu particularități*

Integrarea funcțiilor pe un interval infinit. Există formule speciale de integrare numerică pe un interval infinit, dacă funcția de sub integrală conține un factor exponențial. Pentru intervalul identic cu semiaxa pozitivă avem formula

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} H_j f(a_j). \qquad (6.15)$$

Abscisele a_j și coeficienții H_j din această formulă se găsesc în tabelul XIV (Anexă, pag. 215), corespunzător numărului de puncte $n = 2, 3, 4$ și 5. Sînt date de asemenea estimațiile erorilor de trunchiere a formulelor corespunzătoare, exprimate prin derivatele funcției $f(x)$ (se presupune că derivatele considerate sînt continue pe toată semiaxa pozitivă).

Formula (6.15) se aplică în cazurile cînd se cunoaște sigur că funcția de sub integrală descrește la infinit ca o exponențială. În astfel de probleme printr-o substituție liniară integrala se aduce la forma (6.15) și apoi se calculează cu ajutorul tabelului XIV.

Exemplu. Să se scrie formula pentru calculul integralei

$$\int_0^\infty g(t)\,dt,$$

dacă se știe că funcția $g(t)$ pentru $t\to+\infty$ descrește ca și e^{-2t} și dacă condițiile problemei permit să se calculeze valorile funcției $g(t)$ în orice punct, însă nu mai mult de patru puncte.

Soluție. Cum funcția $g(t)$ descrește ca e^{-2t}, atunci pentru a aduce integrala dată la forma (6.15) facem susbstituția $2t = x$ și punem funcția $g(t)$ sub forma $g\left(\frac{x}{2}\right) = e^{-x} f(x)$. Mai departe aplicăm formula (6.15) pentru $n = 4$ și obținem

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} H_j f(a_j), \quad f(x) = e^x g\left(\frac{x}{2}\right).$$

după care calculăm coeficienții și abscisele din tabelul XIV pentru cazul nostru:

$$\int_0^\infty g(t)\,dt \approx 0{,}301577\, e^{0.322548}\, g(0{,}161274) + 0{,}178710\, e^{1.745761}\, g(0{,}872880) +$$
$$+ 0{,}019444\, e^{4.536620}\, g(2{,}268310) + 0{,}000270\, e^{9.395071}\, g(4{,}697530).$$

În final obținem

$$\int_0^\infty g(t)\,dt \approx 0{,}41636\, g(0{,}1613) + 1{,}0240\, g(0{,}8729) + 1{,}8155\, g(2{,}2683) +$$
$$+ 3{,}25\, g(4{,}6975).$$

Pentru un interval infinit de tipul $(-\infty, +\infty)$ prezintă un interes deosebit formula cu factorul exponențial e^{-x^2}. Această formulă are forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} H'_j f(a'_j). \qquad (6.16)$$

Abscisele a'_j și coeficienții H'_j corespunzători acestei formule se află din tabelul XV (Anexă, pag. 215) pentru numărul de puncte $n = 2, 3, 4$ și 5, precum și estimațiile erorilor de trunchiere corespunzătoare formulelor exprimate cu ajutorul derivatelor funcției $f(x)$ (se presupune că derivatele ce intervin sînt continue pe toată axa reală). De exemplu, pentru trei puncte ($n = 3$) formula (6.16) ne dă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx 1{,}181636 f(0) + 0{,}295409[f(1{,}224745) + f(-1{,}224745)].$$

Integrarea funcțiilor infinite la capetele intervalului. Dacă funcția de sub integrală devine infinită de ordinul $\frac{1}{2}$ la capetele intervalului de integrare relativ la $\frac{1}{|x-a|}$ și $\frac{1}{|x-b|}$, atunci intervalul de integrare se transformă cu ajutorul unei substituții liniare în intervalul $(-1, +1)$ și se aplică formula

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}\right), \qquad (6.17)$$

eroarea acestei formule fiind $\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(c)$, unde $1 < c < 1$.

Dacă funcția de sub integrală devine un infinit de ordinul $\frac{1}{2}$ numai în raport cu $\frac{1}{|x-a|}$ (la un capăt al

intervalului), atunci este preferabil mai întîi să scăpăm de acest inconvenient printr-o transformare convenabilă a integralei și după aceea să aplicăm metodele de integrare numerică:

$$\int_a^b f(x) \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = 2 \int_0^{\sqrt{b-a}} f(a+t^2)\,dt,$$

sau punînd $\frac{f(x)}{\sqrt{x-a}} = g(x)$:

$$\int_a^b g(x)\,dx = 2 \int_0^{\sqrt{b-a}} g(a+t^2)\,t\,dt.$$

Integrarea cu restricții asupra absciselor. Se întîlnesc probleme în care trebuie să se calculeze o integrală pe baza unui număr mic de valori ale funcției, iar valorile funcției pot fi aflate în orice puncte ale intervalului, însă neapărat trebuie să se țină seama de valorile funcției la unul sau ambele capete. Pentru aceasta este natural să se aleagă formula care dă cea mai înaltă precizie. Mai jos se dau cîteva formule de acest gen (pentru cazul a patru și cinci puncte); în aceste formule $h = b - a$, $c = (b + a)/2$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{16} f(a) + 0{,}3288 f(c - 0{,}2877\,h) + 0{,}3882 f(c + 0{,}0905h) + 0{,}2205 f(c + 0{,}4114h)\right]$$

cu eroarea $2{,}02 \left(\frac{h}{10}\right)^8 f^{(7)}(\xi)$, $a < \xi < b$;

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{25} f(a) + 0{,}2231 f(c - 0{,}3602\,h) + 0{,}3118 f(c - 0{,}0836h) + 0{,}2814 f(c + 0{,}2232h) + 0{,}1437 f(c + 0{,}4429\,h)\right]$$

cu eroarea $0{,}174\left(\frac{h}{10}\right)^{10} f^{(9)}(\xi), \quad a<\xi<b$;

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \right.$$

$$\left. + 5f(c+0{,}2236h) + 5f(c-0{,}2236h)\right]$$

cu eroarea $-6{,}6\left(\frac{h}{10}\right)^{7} f^{(6)}(\xi), \quad a<\xi<b$;

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{10}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{32}{9}f(c) + \frac{49}{18}f(c+0{,}3273h) + \right.$$

$$\left. + \frac{49}{18}f(c-0{,}3273h)\right]$$

cu eroarea $0{,}703\left(\frac{h}{10}\right)^{9} f^{(8)}(\xi), \quad a<\xi<b.$

Integrarea în cazul informației suplimentare. Dacă tabelul valorilor funcției este alcătuit pentru puncte echidistante, iar integrarea se face nu pe întreg intervalul, atunci se poate dovedi utilă informația suplimentară asupra valorilor funcției în acele puncte, care se găsesc în afara intervalului de integrare. O situație analoagă se poate întîlni în calculele după metoda lui Romberg (vezi punctul 6.1.2), cînd în intervalul de integrare este cuprins un număr impar de pași sau cînd numărul pașilor nu se divide cu patru.

Fie date valorile funcției în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_{k+1}-x_k=h$), iar $f(x_k)=y_k$. Atunci cele mai simple

din formule, în care se ține seama de informația suplimentară amintită, sînt de forma

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{12}(5y_0+8y_1-y_2), \quad \left\{+\frac{h^4}{24}f'''(\xi)\right\},$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{24}(9y_0+19\ y_1-5y_2+y_3), \quad \left\{-\frac{19}{720}h^5 f^{(4)}(\xi)\right\},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{24}[13(y_1+y_2)-(y_0+y_3)], \left\{+\frac{11}{720}h^5 f^{(4)}(\xi)\right\},$$

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{90}[114y_2+34(y_1+y_3)-(y_0+y_4)],$$

$$\left\{+\frac{1}{756}h^7 f^{(6)}(\xi)\right\}.$$

Pentru fiecare formulă, în acolade, este trecută eroarea respectivă, ξ fiind un punct al intervalelor (x_0, x_2) pentru prima formulă, (x_0, x_3) pentru a doua formulă, (x_0, x_4) pentru a patra formulă.

6.1.4. *Formula de cuadratură a lui Cebîșev*

Se întîlnesc probleme în care este necesar ca toate valorile funcției să fie considerate cu aceeași pondere pentru calculul integralei. Acest lucru este important mai ales în cazurile în care eroarea valorilor măsurate ale funcției este relativ mare, iar precizia tuturor măsurărilor este aceeași. În astfel de situații ponderile egale asigură cea mai mică eroare față de datele inițiale. Pentru aceasta se aplică formula de cuadratură a lui Cebișev:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}c_{j,n}\right),$$

unde valorile factorului $c_{j,n}$ pentru $n = 3, 4, 5, 6, 7$ și 9 sînt date în tabelul 6.4.

Tabelul 6.4

n	$c_{j,n}$	n	$c_{j,n}$
3	0	7	0
	$\pm 0{,}70711$		$\pm 0{,}88386$
4	$\pm 0{,}79465$		$\pm 0{,}52966$
	$\pm 0{,}18759$		$\pm 0{,}32391$
5	0	9	0
	$\pm 0{,}83250$		$\pm 0{,}91159$
	$\pm 0{,}37454$		$\pm 0{,}60102$
6	$\pm 0{,}86625$		$\pm 0{,}52876$
	$\pm 0{,}42252$		$\pm 0{,}16791$
	$\pm 0{,}26664$		

6.2. Derivare numerică

6.2.1. *Formule de derivare numerică*

Problema derivării numerice se pune în modul următor. Se măsoară valorile funcției $y = f(x)$ în puncte echidistante

$$x_k = x_0 + kh, \quad y_k = f(x_k), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Trebuie să se calculeze valorile derivatei $y' = f'(x)$ în aceleași puncte. Cu alte cuvinte, din tabelul valorilor funcției cu pasul constant h trebuie să se alcătuiască tabelul valorilor derivatei ei cu același pas.

Înainte de toate trebuie să atragem atenția asupra următoarei situații importante. În timp ce integrarea numerică ajustează erorile datelor inițiale, înlătură „zgomotul" experimentului, asupra rezultatului derivării numerice acest „zgomot" se dovedește a avea o influență foarte mare: chiar erori relativ mici la datele inițiale pot denatura vizibil rezultatele derivării numerice. De aceea este necesar ca de la început să se ajusteze datele inițiale și numai după aceea să se aplice o metodă sau alta de derivare numerică. Formulele date mai jos constituie rezultatul derivării polinoamelor ce ajustează datele inițiale după metoda celor mai mici pătrate (vezi § 4.4). În aceste formule prin x_0 s-a notat punctul în care se calculează derivata, iar prin y_0' derivata în acest punct obținută după metoda indicată. Valorile derivatei în fiecare dintre formule sînt exprimate atît prin valorile funcției y_k, cît și prin diferențele lor (vezi § 6.3). Asupra erorilor acestor formule vezi punctul 6.2.2.

Cea mai simplă și în același timp cea mai utilizată dintre formulele de derivare

$$y_0' = \frac{1}{h}\left(\frac{y_1 - y_{-1}}{2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) \qquad (6.18)$$

se obține prin ajustarea liniară a tabelului funcției după trei puncte (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1). Această formulă se aplică în toate punctele, în afară de primul și ultimul punct din tabelul valorilor funcției. În primul punct (punctul inițial) se folosește formula

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right),$$

iar în ultimul punct (punctul final) se folosește formula

$$y_0' = \frac{1}{2h}(3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-2} + \frac{3}{2}\Delta^2 y_{-2}\right),$$

însă aceste formule sînt sensibil mai puțin precise și mai puțin fundamentate, decît formula (6.18). De aceea se preferă de obicei ca în punctele limită să nu se calculeze derivata, dacă bineînțeles aceasta nu este neapărat necesară.

Pentru ajustarea cu un polinom de gradul trei după cinci puncte (x_k, y_k), $(k = 0, \pm 1, \pm 2)$, se obține următoarea formulă:

$$y_0' = \frac{1}{h}\left[\frac{2}{3}(y_1 - y_{-1}) - \frac{1}{12}(y_2 - y_{-2})\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{12}\right] \qquad (6.19)$$

Formula (6.19) poate fi considerată ca o precizare a formulei (6.18) prin introducerea unor rectificări în tabelul diferențelor de ordinul trei $-\frac{1}{h}\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{12}$. Cu aceste considerații formula (6.18) urmează să se aplice numai atunci, cînd rectificarea indicată asupra diferențelor de ordinul trei este mai mică decît eroarea provocată de datele inițiale (vezi de asemenea punctul 6.2.2).

Formula (6.19) se aplică pentru toate punctele afară de primele două și ultimele două.

În al doilea și în penultimul punct se pot utiliza formulele:

$$y'_0=\frac{1}{42h}(-19y_{-1}-y_0+12y_1+13y_2-5y_3)=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}-\frac{1}{42}(5\Delta^3 y_0+2\Delta^3 y_{-1})\right],$$

$$y'_0=\frac{1}{42h}(5y_{-3}-13y_{-2}-12y_{-1}+y_0+19y_1)=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}-\frac{1}{42}(2\Delta^3 y_{-2}+5\Delta^3 y_{-3})\right],$$

care îmbunătățesc precizia formulei (6.18) în aceste puncte. Pentru a obține derivatele în punctele limită ale tabelului ajustarea după cinci puncte nu mai este utilă (nu mărește precizia).

Pentru ajustarea cu polinoame de gradul trei și cinci după șapte puncte $(x_k,\ y_k)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3)$ se obțin formulele

$$y'_0=\frac{1}{252h}[58(y_1-y_{-1})+67(y_2-y_{-2})-22(y_3-y_{-3})]=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}-\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{12}-\frac{11}{126}(\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3})\right],$$

(6.20)

$$y'_0=\frac{1}{h}\left[\frac{3}{4}(y_1-y_{-1})-\frac{3}{20}(y_2-y_{-2})+\frac{1}{60}(y_3-y_{-3})\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}-\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{12}+\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{60}\right].$$

(6.21)

Ambele formule se aplică relativ rar în calcule. Ultimul termen în scrierea cu diferențe din aceste formule poate fi utilizat pentru estimarea preciziei formulei (6.19); formula (6.19) urmează să se aplice atunci, cînd ultimul termen în formula (6.21) este mai mic decît erorile provocate de datele inițiale (vezi de asemenea punctul 6.2.2).

Alegerea gradului polinomului de ajustare se face după metodele expuse în § 4.1 și § 4.4.

Îmbunătățirea preciziei derivatei după Richardson. Pornim de la operatorul fundamental de derivare numerică D_h (cu pasul h):

$$D_h y_0=\frac{y_1-y_{-1}}{2h}. \qquad (6.22)$$

Acest operator ne dă valoarea derivatei $y'_0\approx f'(x_0)$ cu eroarea de ordinul lui h^2.

Pentru înlăturarea termenului principal al erorii acestui operator, introducem operatorul $D_{h,1}$:

$$D_{h,1}y_0=\frac{4D_h y_0-D_{2h}y_0}{3}=D_h y_0+\frac{D_h y_0-D_{2h}y_0}{3}, \qquad (6.23)$$

unde $D_{2h}y_0=(y_2-y_{-2})/4h$, care este de asemenea un operator fundamental al derivatei numerice, însă cu pasul $2h$. Operatorul $D_{h,1}y_0$ ne dă aceeași valoare aproximativă a derivatei ca și formula (6.19) însă procesul de obținere a acestei aproximații este mai simplu, iar în procesul de construire a acestei aproximații se vede clar precizia atinsă. Eroarea operatorului $D_{h,1}y_0$ are chiar ordinul lui h^4. Dacă precizia atinsă a derivatei nu este suficientă, se introduce operatorul următor:

$$D_{h,2}=\frac{2^4 D_{h,1}-D_{2h,1}}{2^4-1}=D_{h,1}+\frac{D_{h,1}-D_{2h,1}}{15}, \qquad (6.24)$$

care înlătură partea principală a erorii operatorului (6.23). Acest proces de îmbunătățire a preciziei derivatei se poate continua cu ajutorul operatorilor

$$D_{h,\,m+1}=\frac{2^{2m+2}D_{h,\,m}-D_{2h,\,m}}{2^{2m+2}-1}\quad(m=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

însă, ținînd cont de erorile datelor inițiale, nu se recomandă să continuăm procesul oricît de mult. Procesul indicat de îmbunătățire a preciziei derivatei se programează și se controlează ușor.

Exemplu. Pentru a ilustra procesul de calcul și de îmbunătățire a preciziei derivatei, precum și precizia atinsă, să aplicăm acest proces tabelului de valori a funcției $y=e^x$, $(y'=e^x)$ cu pasul $h=0,1$, cu datele inițiale rotunjite pînă la 0,0001, așa că eroarea datelor inițiale nu depășește 0,00005 (tabelul 6.5).

Tabelul 6.5

x	y	$D_h\,y$	$D_{2h}\,y$	$D_{h/2}\,y$	Eroarea $D_{h/2}\,y$	Eroarea $D_h\,y$
1,0	2,7183					
1,1	3,0042	3,0090				0,0048
1,2	3,3201	3,3255	3,3422	3,3199	−0,0002	0,0054
1,3	3,6693	3,6755	3,6937	3,6694	0,0001	0,0062
1,4	4,0552	4,0620	4,0822	4,0553	0,0001	0,0068
1,5	4,4817	4,4890	5,5115	4,4815	−0,0002	0,0073
1,6	4,9530	4,9610	4,9860	4,9527	−0,0003	0,0080
1,7	5,4739	5,4830				0,0091
1,8	6,0496					

6.2.2. *Alegerea pasului optim în derivarea numerică și estimarea erorilor*

Eroarea derivatei numerice se compune din două părți: eroarea datorată formulei de derivare numerică (*eroarea de trunchiere*) și din eroarea provocată de determinarea imprecisă a valorilor inițiale ale funcției (*eroarea de rotunjire*). Prin variația pasului h al derivării numerice aceste erori variază în direcții contrare, ceea ce permite alegerea unui pas optimal, care să ne dea cea mai mică sumă a erorilor.

Pentru formula fundamentală de derivare numerică (6.18) eroarea de rotunjire se estimează prin mărimea ε/h, unde ε este eroarea limită a valorilor măsurate y_k (de exemplu eroarea trei sigma, vezi punctul 2.2.3). Eroarea de trunchiere a aceleiași formule se estimează cu mărimea $M_3h^2/6$, unde M_3 este cea mai mare valoare a expresiei $|f'''(x)|$ în intervalul considerat. Comportarea erorii sumă

$$\varepsilon/h+M_3h^2/6 \qquad (6.25)$$

este reprezentată în fig. 6.2. Eroarea sumă (6.25) atinge valoarea minimă, aproximativ egală cu $\varepsilon^{2/3}M_3^{1/3}$ pentru pasul

$$h=h_{opt}=\sqrt[3]{3\varepsilon/M_3}.$$

În această situație eroarea de trunchiere constituie 1/3 din eroarea sumă, iar restul de 2/3 cade asupra erorii de rotunjire. Prin urmare, pentru pasul optim h eroarea de trunchiere este numai jumătate din eroarea de rotunjire.

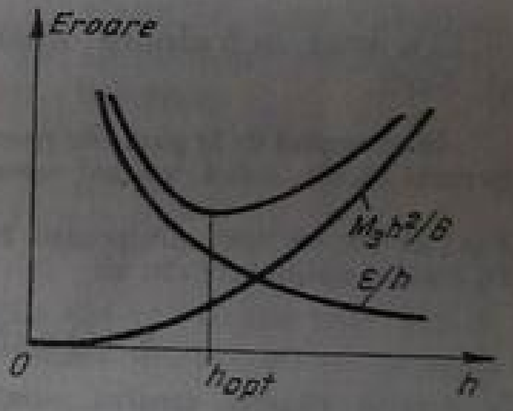

Fig. 6.2

Pentru alegerea practică a pasului optim al derivării numerice, după formula (6.18) se recomandă următoarea regulă: se alege pasul astfel încît valorile absolute ale mărimilor diferenței de ordinul trei Δ^3y să se afle în intervalul $(3\varepsilon,\,6\varepsilon)$. Cu alte cuvinte, pasul trebuie să fie astfel, încît ultimul termen $\frac{\Delta^3y_{-1}+\Delta^3y_{-2}}{12}$ din paranteză în formula (6.19) în valoare absolută să fie cuprins între $\varepsilon/2$ și ε. Se înțelege că această recomandare presupune că eroarea limită ε a rezultatelor măsurărilor y_k este cunoscută și că măsurarea valorilor y_k se poate face cu orice pas (așa de exemplu în cazul cînd funcția se dă grafic).

Dacă chiar și pentru pasul optim precizia atinsă a derivatei numerice nu este suficientă (adică eroarea sumă

$3\varepsilon/(2h)$ este încă mare), urmează să mărim pasul și să aplicăm o formulă mai precisă, de exemplu (6.19). Pentru formula (6.19) eroarea de rotunjire se estimează prin $3\varepsilon/(2h)$, iar eroarea de trunchiere prin $h^4M_5/30$, unde M_5 este cea mai mare valoare a expresiei $|f^{(5)}(x)|$ în intervalul considerat. Acest lucru conduce pentru formula (6.19) la pasul optim

$$h = h_{opt} = \sqrt[5]{\frac{45\,\varepsilon}{4\,M_5}}$$

cu eroarea sumă minimă $15\,\varepsilon/(8h) \approx 1{,}2\,\varepsilon^{4/5}M_5^{1/5}$.

Recomandarea practică pentru alegerea pasului optim de derivare numerică după formula (6.19) este următoarea: se alege pasul h astfel ca diferențele de ordinul cinci $\Delta^5 y_k$ în valoare absolută să se afle în intervalul $(11\,\varepsilon\,;\,45\,\varepsilon)$. Cu alte cuvinte, pasul h trebuie să fie astfel, încît ultimul termen $\dfrac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{60}$ din paranteza din formula (6.21), luat în valoare absolută, să fie situat între $3\varepsilon/8$ și $3\varepsilon/2$.

În exemplul de la pag. 162 pentru $\varepsilon = 5\cdot10^{-5}$ și $M_3 = M_5 = 6$ pentru formula (6.18), adică pentru operatorul D_h, pasul optim este dat de $h = \sqrt[3]{25}\cdot10^{-2} \approx 0{,}03$, iar pentru formula (6.19), adică pentru operatorul $D_{h,1}$ pasul optim este dat de

$$h_1 = \sqrt[5]{9{,}375}\cdot10^{-1} \approx 0{,}16.$$

În această situație eroarea sumă se estimează în primul caz prin $3\varepsilon/(2h) \approx 25\cdot10^{-4}$, iar în al doilea caz prin $15\,\varepsilon/(8h_1) \approx 6\cdot10^{-4}$. Practic, în al doilea caz chiar pentru pasul $h = 0{,}1$ eroarea nu depășește $3\cdot10^{-4}$.

6.2.3. *Derivata de ordinul al doilea*

Derivata de ordinul al doilea se poate calcula ca derivata derivatei de ordinul întîi: la început se întocmește tabelul derivatelor funcției date și după aceea cu același tabel se alcătuiește tabelul derivatelor de ordinul al doilea. Pentru aceasta urmează să avem în vedere ca pasul optimal

pentru derivata de ordinul al doilea poate să nu coincidă cu pasul optimal pentru prima derivată și că pentru un pas mic eroarea derivatei de ordinul al doilea crește vizibil. De exemplu, dacă pentru prima derivată calculată cu formula (6.18) a fost ales pasul optimal $h = 0{,}1$, eroarea valorilor derivatei poate să atingă $3\varepsilon/(2h) = 15\varepsilon$ (ε este eroarea datelor inițiale) și chiar dacă se reușește să se mărească pasul pentru derivata a doua, să zicem, de trei ori, atunci eroarea derivatelor de ordinul al doilea crește chiar de cinci ori. Exprimîndu-ne mai puțin precis, la fiecare derivare se pierde o cifră. Din această cauză metodele numerice pentru calculul derivatelor de ordin superior nu se recomandă.

Pentru calcularea directă a derivatei de ordinul al doilea se folosește formula

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) = \frac{1}{h^2}\,\Delta^2 y_{-1}. \qquad (6.26)$$

Aici eroarea de rotunjire se estimează prin $4\varepsilon/h^2$, iar eroarea de trunchiere prin $h^2M_4/12$, unde M_4 este valoarea maximă a expresiei $|f^{(4)}(x)|$ în intervalul considerat. Pasul optimal se determină cu formula

$$h = h_{opt} = \sqrt[4]{48\,\frac{\varepsilon}{M_4}}\,.$$

Pentru acest pas optimal eroarea de rotunjire este egală cu eroarea de trunchiere, iar eroarea sumă se estimează prin $8\varepsilon/h^2 = 2\sqrt{\varepsilon M_4/3}$.

Practic se recomandă să se aleagă pasul h astfel încît diferențele de ordinul patru $\Delta^4 y_2$ să constituie aproximativ $48\ \varepsilon$, unde ε este eroarea datelor inițiale.

O formulă mai exactă pentru derivata de ordinul al doilea

$$y_0'' = \frac{1}{12\,h^2}(-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{\Delta^4 y_{-2}}{12}\right) \qquad (6.27)$$

se poate obține de asemenea prin îmbunătățirea derivatei (6.26) după meotoda lui Richardson : dacă se introduce operatorul fundamental

$$D_h^2 y_0 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2},$$

atunci îmbunătățirea preciziei derivatei se obține cu operatorul

$$D_{h,1}^2 = \frac{4D_h^2 - D_{2h}^2}{3} = D_h^2 + \frac{D_h^2 - D_{2h}^2}{3}.$$

Pentru ultima formulă pasul optimal se determină din condiția ca diferențele de ordinul șase $\Delta^6 y_x$, luate în valoare absolută, să fie cuprinse între 240ε și 480ε. Cu aceasta eroarea sumă se estimează prin $8\varepsilon/h^2$.

6.3. Interpolare

6.3.1. *Interpolare parabolică*

Pentru studiul dependenței funcționale dintre două mărimi fizice x și y, exprimate prin datele experimentale, adesea este utilizat tabelul valorilor funcției $y_i = f(x_i)$ în punctele determinate $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cea mai simplă problemă de interpolare a funcției constă în calcularea aproximativă a valorilor acestei funcții într-un anumit punct x dintr-un interval (fig. 6.3).

Prin *interpolare parabolică* înțelegem aproximarea funcției $f(x)$ cu polinomul $P(x) \equiv P_n(x)$ de grad cel mult n, ale cărui valori în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ coincid cu valorile funcției date $f(x)$:

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{6.28}$$

Punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se numesc *noduri de interpolare*. *Polinomul de interpolare* $P(x)$ este unic definit de nodurile de interpolare și valorile funcției în aceste noduri. Deoarece

interpolarea păstrează valorile funcției în noduri, ea va păstra și erorile de măsurare ale acestor valori, adică păstrează (sau chiar amplifică) „zgomotul" experimentului. De aceea interpolarea se aplică numai în acele probleme, în care aceste erori se pot neglija (în particular, în utilizarea tabelelor matematice).

Polinomul de interpolare $P(x)$ se scrie comod după *formula lui Lagrange* :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i, \tag{6.29}$$

unde polinoamele

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}, \tag{6.30}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$, se determină numai cu ajutorul nodurilor și iau în ele valorile

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j, \\ 0 \text{ pentru } i \neq j. \end{cases}$$

Formula lui Lagrange dă o expresie simplă a polinomului de interpolare cu ajutorul valorilor date ale funcției, y_i. Calculul după această formulă pentru noduri de interpolare *fixate* (posibil însă pentru diferite funcții) se poate programa ușor. Dacă în cazul nodurilor de interpolare fixate trebuie să se calculeze valorile unui mare număr de funcții diferite în aceleași puncte, atunci valorile corespunzătoare ale polinoamelor $L_i(x)$ se pot tabela dinainte.

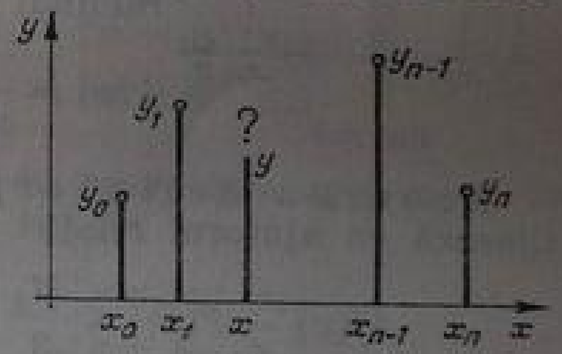

Fig. 6.3

Eroarea de interpolare parabolică poate fi scrisă sub forma

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

unde punctul ξ este situat în intervalul ce conține toate nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ și punctul x. Dacă în acest interval se cunoaște valoarea maximă a expresiei $|f^{(n+1)}(x)|$, notată prin M_{n+1}, atunci se poate obține o *estimare a erorii*:

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|. \quad (6.31)$$

Aplicarea incomodă a acestei estimații pentru funcții care nu sînt date analitic limitează aplicabilitatea formulei de interpolare a lui Lagrange. Această formulă nu este adaptabilă la creșterea numărului de noduri și a gradului polinomului de interpolare, pentru mărirea preciziei interpolării.

În cazul particular al interpolării liniare, adică al interpolării funcției $f(x)$ prin funcția liniară $P(x)$ după două noduri x_0 și x_1 (fig. 6.4), formula lui Lagrange are forma

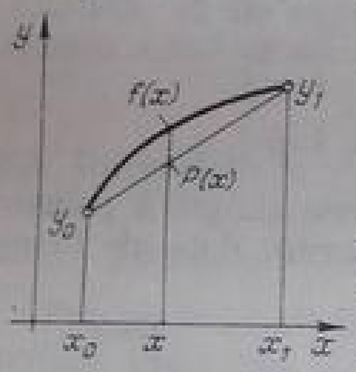

Fig. 6.4

$$P(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1, \quad (6.32)$$

formulă care se scrie comod cu ajutorul unui determinant:

$$P(x) = \frac{1}{x_1-x_0} \begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_1 & y_1 \end{vmatrix}. \quad (6.33)$$

Eroarea de interpolare liniară se estimează cu ajutorul relației

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} |(x-x_0)(x-x_1)|,$$

unde M_2 este valoarea maximă a expresiei $|f''(x)|$ în intervalul ce conține punctele x_0, x_1, x.

6.3.2. *Procesul Eitkin*

Procesul de interpolare iterativă al lui Eitkin se aplică în acele probleme, în care funcția pe tot intervalul nu trebuie reprezentată printr-un polinom de interpolare ci

este nevoie numai să se calculeze valorile ei într-un punct determinat (cea mai simplă problemă de interpolare). Mai exact, problema se pune în modul următor. Fie tabelul funcției $y = f(x)$ care conține suficient de multe valori. Trebuie să se calculeze valoarea aproximativă a funcției într-un anumit punct x care nu figurează în tabel, cu o precizie dată, folosind punctele din vecinătate cu x drept noduri de interpolare. Ideia rezolvării problemei constă în faptul că se adaugă treptat noduri de interpolare și deci se mărește gradul polinomului de interpolare pînă ce se atinge precizia cerută (dacă acest lucru este posibil) — asupra preciziei raționăm după coincidența cifrelor succesiunilor corespunzătoare rezultatelor calculelor.

Metoda lui Eitkin dă un algoritm simplu și ușor de programat pentru calculul valorilor polinoamelor de interpolare într-un punct dat x prin adăugarea treptată a unor noduri de interpolare. Pentru simplificarea scrierii și descrierii acestui algoritm se vor nota polinoamele de interpolare cu indici corespunzători nodurilor, de exemplu polinomul de interpolare cu nodurile x_0 și x_1 se va scrie astfel:

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1-x_0} \begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Analog, în cazul nodurilor de interpolare x_0 și x_2 se va scrie

$$P_{0,2}(x) = \frac{1}{x_2-x_0} \begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

După ce s-au construit polinoamele de interpolare liniară $P_{0,1}(x)$ pentru nodurile x_0, x_1 și $P_{0,2}(x)$ pentru nodurile x_0, x_2, se construiește polinomul de interpolare de gradul doi pentru nodurile x_0, x_1, x_2 după formula

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2-x_1} \begin{vmatrix} x-x_1 & P_{0,1}(x) \\ x-x_2 & P_{0,2}(x) \end{vmatrix}. \quad (6.35)$$

Continuînd acest proces, ajungem la *algoritmul general al lui Eitkin*:

$$P_{0,1,\ldots,k,k+1}(x) = \frac{1}{x_{k+1}-x_k}\begin{vmatrix} x-x_k & P_{0,1,\ldots,k-1,k}(x) \\ x-x_{k+1} & P_{0,1,\ldots,k-1,k+1}(x) \end{vmatrix}, \tag{6.35}$$

care ne permite să adăugăm un nou nod x_{k+1} la nodurile considerate mai înainte $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Rezultatele calculelor este comod să fie scrise sub forma tabelului 6.6. Calculul după această schemă pe un

Tabelul 6.6

	x_i	$x-x_i$	y_i	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	...
0	x_0	$x-x_0$	y_0	—	—	—	...
1	x_1	$x-x_1$	y_1	$P_{0,1}(x)$	—	—	...
2	x_2	$x-x_2$	y_2	$P_{0,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	—	...
3	x_3	$x-x_3$	y_3	$P_{0,3}(x)$	$P_{0,1,3}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	
...	...	...	...	...	...	...	...

calculator se poate realiza printr-o înmulțire încrucișată, deoarece elementele determinantului figurează în schemă în aceeași ordine ca și în determinant.

Exemplu. Să se calculeze lg 4,5 pe baza tabelului 6.7, în care se dau logaritmii cu pasul $h = 0{,}2$.

Tabelul 6.7

x	$y = \lg x$
4,0	0,60206
4,2	0,62325
4,4	0,64345
4,6	0,66276
4,8	0,68124
5,0	0,69897

* Observăm că dacă se dezvoltă determinantul în (6.35), se ajunge la același polinom de interpolare ca și după formula lui Lagrange (6.29).

Soluție. Calculele sînt trecute în tabelul 6.8 ($x = 4{,}5$).

Tabelul 6.8

i	x_i	$x-x_i$	y_i	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$
0	4,0	0,5	0,60206			
1	4,2	0,3	0,62325	0,655035		
2	4,4	0,1	0,64345	0,653797	0,653178	
3	4,6	−0,1	0,66276	0,652643	0,653241	0,653210
4	4,8	−0,3	0,68124	0,651547	0,653291	0,653206

Calculele se dau cu o cifră în plus pentru a micșora eroarea de rotunjire și de aici urmează că rezultatul se va rotunji pînă la 10^{-5} ca și valorile din tabel, ceea ce conduce la lg 4,5 = 0,65321.

Pentru a mări rapiditatea convergenței procesului Eitkin se recomandă *să se adauge noi noduri de ambele părți ale punctului inițial* x_0, iar acest punct să se aleagă cît mai aproape de punctul x, în care dorim să calculăm valoarea funcției.

Exemplu. Vom da calculele pentru exemplul precedent, mărind numărul nodurilor de ambele părți ale punctului inițial $x_0 = 4{,}4$, adică alegînd succesiunea de puncte $x_0 = 4{,}4$, $x_1 = 4{,}6$, $x_2 = 4{,}2$, $x_3 = 4{,}8$ etc. Calculul este dat în tabelul 6.9.

Tabelul 6.9

i	x_i	$x-x_i$	y_i	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$
0	4,4	0,1	0,64345			
1	4,6	−0,1	0,66276	0,653105		
2	4,2	0,3	0,62325	0,653550	0,653216	
3	4,8	−0,3	0,68124	0,652898	0,653206	0,653212

Anumite complicații de calcul se vor compensa aici prin atingerea mai rapidă a preciziei dorite, care se atinge cu polinoamele de interpolare $P_{0,1,3}(x)$ (calculul polinomului $P_{0,1,2,3}(x)$ se face numai pentru control).

6.3.3. *Rezolvarea ecuațiilor cu ajutorul funcției date prin tabel*

Problema se pune în modul următor. Trebuie să rezolvăm ecuația $f(x) = 0$ cu condiția că funcția $y = f(x)$ este dată numai prin valorile $y_i = f(x_i)$ în anumite puncte x_i

din vecinătatea rădăcinii căutate $\bar{x}$. În acest scop se presupune monotonia funcției $y = f(x)$ în vecinătatea considerată, ceea ce asigură unicitatea rădăcinii și existența funcției inverse $x = g(y)$. Din condiția $f(x) = 0$ rezultă că $\bar{x} = g(0)$. De aceea problema aflării rădăcinii revine la calculul valorii funcției inverse $x = g(y)$ în punctul $y=0$ cu ajutorul valorilor acestei funcții $x_i = g(y_i)$ în punctele y_i, adică la o problemă de interpolare. Această interpolare este comod să fie efectuată cu ajutorul procesului iterativ al lui Eitkin.

Despre modul de dispunere a rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ se poate afla pe baza variației semnului valorilor y_i. Să presupunem că această variație de semn are loc prin trecerea de la valoarea y_0 la valoarea y_1 (ceea ce asigură existența rădăcinii între x_0 și x_1). În acest caz procesul Eitkin urmează să se aplice valorilor inițiale y_0 și y_1 și să se mărească numărul nodurilor de ambele părți ale acestor puncte (dacă acest lucru este posibil). Asupra preciziei atinse raționăm pe baza coincidenței cifrelor corespunzătoare în aproximațiile succesive.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $e^{-x} - x = 0$ cu ajutorul tabelului 6.10 al funcției e^{-x}, cu pasul $h = 0{,}05$.

Tabelul 6.10

x	e^{-x}	$x^{-x}-x=y$
0,50	0,60653	0,10653
0,55	0,57695	0,02695
0,60	0,54881	−0,05119
0,65	0,52205	−0,12795

Soluție. În coloana a treia a tabelului 6.10 sînt trecute diferențele $e^{-x} - x = y$. Aceste diferențe își schimbă semnul odată cu trecerea de la punctul $x = 0{,}55$ la punctul $x = 0{,}60$. De aceea rădăcina căutată a ecuației date va fi situată între 0,55 și 0,60. Să punem $x_0 = 0{,}55$, $x_1 = 0{,}60$ și să efectuăm calculul cu ajutorul procesului Eitkin. Aceste calcule sînt redate în tabelul 6.11.

La ultimele două valori aproximative ale rădăcinii 0,567144 și 0,567142 coincid cifrele pînă la ordinul 10^{-5}. De aceea se poate considera că soluția ecuației date este $\bar{x} = 0{,}56714$ cu o eroare mai mică decît 10^{-5}.

Tabelul 6.11

i	$y_i = e^{-x_i} - x_i$	$0 - y_i$	x_i	$P_{0,i}(0)$	$P_{0,1,i}(0)$
0	0,02695	−0,02695	0,55		
1	−0,05119	0,05119	0,60	0,567245	
2	0,10653	−0,10653	0,50	0,566933	0,567144
3	−0,12795	0,12795	0,65	0,567398	0,567142

Observație. În calculul manual putem simplifica calculul aproximațiilor succesive, dacă în aproximațiile anterioare au coincis cifrele de mai multe ordine. Anume este posibil să conducem calculul numai pentru rectificări. Vom explica aceasta prin calculul valorilor $P_{0,1,3}(x)$ pentru ultimul exemplu. În aproximațiile $P_{0,1}(x) = 0{,}567245$ și $P_{0,3}(x) = 0{,}567398$ coincid primele trei zecimale. Dacă notăm $c = 0{,}567$ și corecțiile $\alpha = 0{,}000245$, $\beta = 0{,}000398$, atunci calculul se simplifică în modul următor:

$$P_{0,1,3}(0) = \frac{1}{y_3 - y_1}\begin{vmatrix} 0 - y_1 & P_{0,1}(0) \\ 0 - y_3 & P_{0,3}(0) \end{vmatrix} = \frac{1}{y_3 - y_1}\begin{vmatrix} -y_1 & c + \alpha \\ -y_3 & c + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= c + \frac{1}{y_3 - y_1}\begin{vmatrix} -y_1 & \alpha \\ -y_3 & \beta \end{vmatrix} = 0{,}567 + \frac{1}{-0{,}07676}\begin{vmatrix} 0{,}05119 & 0{,}000245 \\ 0{,}12795 & 0{,}000398 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}567 + 0{,}142 \cdot 10^{-3} = 0{,}567142.$$

6.3.4. *Inversarea funcțiilor date prin tabel*

Pentru funcția monotonă $y = f(x)$, tabelul funcției inverse $x = g(y)$ se obține din tabelul funcției directe prin simpla schimbare a coloanelor x și y (tabelul 6.12).

Tabelul 6.12

x	$y = f(x)$	y	$x = g(y)$
x_1	y_1	y_1	x_1
x_2	y_2	y_2	x_2
...	...	...	...
x_n	y_n	y_n	x_n

Dacă însă în tabelul funcției directe $y = f(x)$ valorile argumentului au fost echidistante, în tabelul funcției inverse $x = g(y)$ valorile argumentului nu mai sînt echidistante, ceea ce uneori îngreunează utilizarea acestui tabel. Pentru a alcătui tabelul funcției inverse cu pas

constant, trebuie să aplicăm interpolarea. Aici este mai comod procesul Eitkin. În cazuri mai simple este suficient să ne mărginim la interpolarea liniară.

Exemplu. În unele probleme apare adesea necesar să se rezolve o ecuație de tipul

$$\operatorname{tg} x = \lambda/x,$$

cînd λ ia valori într-un anumit interval. Trebuie să alcătuim un tabel al soluțiilor ecuației $x = g(\lambda)$ cu pasul constant în raport cu λ.

Soluție. Cum ecuația considerată este transcendentă, este mult mai simplu ca la început să alcătuim tabelul funcției $\lambda = f(x) = x \operatorname{tg} x$ și după aceasta inversa ei. În tabelul 6.13 sînt date rezultatele acestei inverse pentru determinarea celei mai mici rădăcini pozitive ale ecuației cu $0{,}17 < \lambda < 0{,}27$.

Calculul s-a efectuat cu ajutorul interpolării liniare.

Tabelul 6.13

x	$x \operatorname{tg} x = \lambda$	$\Delta\lambda$	λ	$x = g(\lambda)$	Δx
0,40	0,1691		0,17	0,4010	
		91			109
0,41	0,1782		0,18	0,4119	
		94			106
0,42	0,1876		0,19	0,4225	
		96			103
0,43	0,1972		0,20	0,4328	
		99			100
0,44	0,2071		0,21	0,4428	
		103			97
0,45	0,2174		0,22	0,4525	
		105			94
0,46	0,2279		0,23	0,4619	
		108			93
0,47	0,2387		0,24	0,4712	
		112			89
0,48	0,2499		0,25	0,4801	
		115			87
0,49	0,2614		0,26	0,4888	
		118			85
0,50	0,2732		0,27	0,4973	

6.3.5. *Interpolare în tabele cu pas constant. Tabele de diferențe (finite) ale funcției*

Pentru tabelul funcției

$y = f(x)$ cu pasul constant h (adică cu noduri de interpolare echidistante)

$$x_k = x_0 + kh,\ y_k = f(x_k),\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (6.36)$$

construirea polinomului de interpolare se face mult mai comod după formule ce folosesc tabelele diferențelor funcției.

Diferențele (finite) funcției (diferențele de primul ordin) se definesc astfel:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (6.37)$$

Diferențele de ordinul doi se definesc ca diferențele diferențelor de ordinul întîi:

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \qquad (6.38)$$

Diferențele de ordinul m se definesc prin inducție:

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k. \qquad (6.39)$$

Diferențele de diferite ordine se scriu comod în *tabelul diagonal al diferențelor* (tabelul 6.14).

Tabelul 6.14

x	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
...	...		...		...
y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
	Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		...
y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	
	Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		...
y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
	Δy_1		$\Delta^3 y_0$		...
y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
	Δy_2		$\Delta^3 y_1$		...
y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
...	...	...	...	...	...

În acest tabel toate diferențele de același ordin se găsesc în aceeași coloană, iar linia pe care se află fiecare dintre diferențe este situată între liniile acelor numere,

pentru care se calculează această diferență. Cu aceasta diferențele se scriu în unități întregi de ordin inferior ale valorilor tabelare ale funcției.

Formulele de interpolare ce utilizează valorile tabelare ale funcției se scriu sub o astfel de formă, în care creșterea gradului polinomului de interpolare prin îndesirea nodurilor de interpolare se face prin simpla adăugare a unor noi termeni la cei deja scriși. În legătură cu cele de mai sus vom utiliza următoarele notații. Argumentul x îl vom înlocui cu noul argument $u = \dfrac{x - x_0}{h}$, care în nodurile de interpolare ia numai valorile întregi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Interpolarea se face de obicei în intervalul $x_0 < x < x_1$ sau $x_{-1} < x < x_0$. Polinomul de interpolare $P(x) = P(x_0 + uh)$ se scrie sub forma dezvoltată după argumentul u. Cum gradul polinomului de interpolare nu-l vom indica, formulele de interpolare se vor scrie sub forma

$$y \approx P(x_0 + uh), \text{ unde } u = \frac{x - x_0}{h}.$$

La începutul tabelului, unde îndesirea nodurilor de interpolare se efectuează înaintea punctului inițial x_0, se aplică *prima formulă de interpolare a lui Newton*

$$y \approx y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \tag{6.40}$$

La sfîrșitul tabelului, unde îndesirea nodurilor de interpolare se face numai înapoi de la punctul inițial x_0, se aplică *cea de-a doua formulă de interpolare a lui Newton*

$$y \approx y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 y_{-3} + \ldots \tag{6.41}$$

Oprindu-ne în formula lui Newton la un anumit termen, se face o eroare (eroarea de trunchiere) a cărei mărime are ordinul primului termen lăsat la o parte (se

presupune că funcția $f(x)$ nu prezintă oscilații rapide, adică oscilații cu perioada mai mică sau egală cu pasul h al tabelului).

Exemplu. Se cere să se construiască formula de interpolare pentru tabelul logaritmilor cu pasul $h = 0{,}2$, dat la pag. 170.

Soluție. Alcătuim pentru tabelul dat tabelul diagonal al diferențelor (vezi ultimele trei coloane ale tabelului 6.15).

Tabelul 6.15

x	$y = \lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4,0	0,60206			
		2119		
4,2	0,62325		−99	
		2020		10
4,4	0,64345		−89	
		1931		6
4,6	0,66276		−83	
		1848		8
4,8	0,68124		−75	
		1773		
5,0	0,69897			

Diferențele, așa cum s-a obișnuit, au fost scrise în unități întregi de zecimale de ordinul cinci, de exemplu $\Delta y_0 = 2119 \cdot 10^{-5}$.

Diferențele mai mari de ordinul trei nu au mai fost scrise, deoarece mărimea lor este mai mică decît eroarea de rotunjire (vezi anexa). Pentru interpolarea tabelului dat ne putem mărgini la polinoame de interpolare de gradul doi

$$y \approx y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0,\ u = \frac{x - x_0}{0{,}2},$$

alegînd de fiecare dată punctul inițial x_0 astfel ca $x_0 < x < x_2$, adică $0 < u < 2$. În acest caz primul termen lăsat la o parte din formula lui Newton $\dfrac{u(u-1)(u-2)}{6}\Delta^3 y_0$ este mai mic în valoare absolută decît 0,00001 (și prin urmare, eroarea de interpolare va fi de același ordin ca și eroarea de rotunjire a tabelului). De exemplu, pentru $x = 4{,}5$ punem $x_0 = 4{,}4$, adică $u = 0{,}5$:

$$y = \lg 4{,}5 \approx 0{,}64345 + 0{,}5 \cdot 0{,}01931 - \frac{1}{8}(-0{,}00083) = 0{,}65321.$$

La mijlocul tabelului, unde îndesirea nodurilor de interpolare se poate face de ambele părți ale punctului

inițial x_0, se aplică formula *lui Bessel* (pentru un număr par de noduri)

$$y \approx y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{u(u-1)\left(u-\frac{1}{2}\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots \qquad (6.42)$$

sau *formula lui Stirling* (pentru un număr impar de noduri)

$$y \approx y_0 + u\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots \qquad (6.43)$$

Reținînd din formula lui Bessel un număr par de termeni sau din formula lui Stirling un număr impar de termeni, facem o eroare a cărei mărime are ordinul primului termen lăsat la o parte [se presupune că funcția $f(x)$ nu prezintă oscilații rapide].

În particular, interpolarea liniară după formula

$$y \approx y_0 + u\Delta y_0 \qquad (6.44)$$

dă o precizie suficientă în intervalul $x_0 < x < x_1$, unde $0 < u < 1$, numai în cazul în care diferența de ordinul doi este astfel încît mărimea $\frac{1}{8}|\Delta^2 y|$ este mai mică decît eroarea admisă. Un astfel de exemplu îl reprezintă tabelul 6.13 (pag. 174), unde eroarea de interpolare necesară este 0,0001, iar diferențele de ordinul doi $\Delta^2\lambda$ nu depășesc 0,0004.

În multe tabele matematice pasul tabelului și precizia lui concordă, astfel încît pe orice secțiune a tabelului eroarea de interpolare liniară nu depășește unitatea de cel mai mic ordin al valorii din tabelul funcției. În caz contrar de obicei se indică ordinul de interpolare admis.

În tabelele obținute pe baza experimentelor rar se admite o interpolare liniară, chiar și după ajustare. Dacă la un anumit tabel tehnic dorim să admitem o interpolare liniară, atunci urmează să efectuăm o subtabelare, adică să alcătuim un tabel cu un pas de un număr suficient de ori mai mic decît pasul tabelului inițial. Subtabelarea este comod să se facă cu ajutorul formulei de interpolare a lui Lagrange (există chiar tabele gata făcute în acest scop). Pentru rezolvarea problemei privind alegerea pasului noului tabel urmează să acționăm în conformitate cu următoarele: prin micșorarea pasului tabelului de m ori, diferențele de primul ordin se micșorează aproximativ de m ori, diferențele de ordinul doi aproximativ de m^2 ori, diferențele de ordinul trei aproximativ de m^3 ori și așa mai departe.

Estimațiile erorilor de interpolare prin diferențe, date mai înainte se referă la cazul *tabelelor corecte ale diferențelor*. Astfel de tabele au loc la funcții suficient de netede și pentru un pas suficient de mic. Ele sînt caracterizate de faptul că diferențele de un anumit ordin sînt practic nule (adică devin comparabile cu erorile de rotunjire ale acestor diferențe, vezi Anexa, pag. 189). De aceea diferențele de ordinul precedent sînt practic constante, ceea ce conduce la variația lină a diferențelor. În tabele de acest tip prezența unei variații neline a diferențelor vădește de obicei o anumită eroare de calcul și trebuie verificate cu grijă valorile tabelare ale funcției (Anexa pag. 190). Posibilitatea de control al tabelelor se bazează pe observații asupra variației line a diferențelor și este una dintre cauzele principale, după care adesea este preferabil să avem de a face cu tabele cu pas constant (cel puțin pe anumite porțiuni).

ANEXĂ

CALCUL APROXIMATIV ȘI ESTIMARE A ERORII DE ROTUNJIRE

1. Numere aproximative, erorile lor absolute și relative

În cadrul prelucrării datelor experimentale calculele se fac cu valori aproximative ale mărimilor, dacă valorile lor exacte sînt necunoscute. La calculele cu erorile aleatoare de măsurare ale mărimilor inițiale se adaugă erorile de rotunjire, iar erorile de rotunjire au tendința de acumulare. Regulile calculelor aproximative, pe de o parte, duc la diminuarea acumulării excesive a erorilor de rotunjire și, pe de altă parte, la micșorarea volumului de calcul cu asigurarea preciziei inaccesibile (sau nedorite) a rezultatului. Estimarea rațională a erorilor în calcule permite să indicăm numărul optim de cifre care urmează a fi păstrate în calcule, precum și în rezultatul final.

Valorile aproximative ale mărimilor le vom numi *numere aproximative*. Eroarea numărului aproximativ a, adică diferența $a-a_0$ dintre acesta și valoarea exactă a_0 este de obicei necunoscută. Se consideră însă cunoscută o anumită *estimație a erorii* de forma

$$|a-a_0|<\Delta_a. \tag{1}$$

Numărul Δ_a se numește *eroare absolută a numărului aproximativ a* (sau *eroare limită absolută*). Acest număr nu este determinat în mod unic, deoarece poate fi mărit. Sîntem însă totdeauna interesați să micșorăm cît mai mult

posibil numărul ce satisface inegalitatea (1) și în cele ce urmează va fi vorba de o astfel de estimație optimă a erorii. Cum datele inițiale se obțin din măsurări și, prin urmare, conțin erori aleatoare, rezultă că estimațiile erorilor datelor inițiale sînt intervale de încredere, adică se dau cu o anumită siguranță (vezi cap. 1 și 2). Regulile calculelor aproximative permit să se estimeze erorile rezultatului calculului cu numere aproximative cu o siguranță cel puțin egală cu siguranța intervalelor de încredere ale datelor inițiale.

Erorile absolute se scriu, de obicei, cu cel mult două-trei cifre semnificative; rotunjirea erorilor absolute se face totdeauna cu exces. Chiar la numărul aproximativ a urmează să se păstreze numai acele cifre, care intră și în rotunjirea erorii sale absolute Δ_a. De exemplu, pentru $\Delta_a = 0{,}37$ nu vom scrie $a = 2{,}5443$, ci vom scrie $a = 2{,}54$, sau $a = 2{,}5$, sau $a = 3$.

Eroarea relativă a numărului aproximativ a este raportul dintre eroarea absolută a lui și valoarea absolută a numărului a. Eroarea relativă se notează prin simbolul

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \qquad (a \neq 0), \tag{2}$$

și se exprimă de obicei în procente. Eroarea relativă se scrie cu cel mult două-trei cifre semnificative. În multe aplicații tehnice precizia rezultatelor se caracterizează prin erorile lor relative. Eroarea relativă nu variază cînd variază scara de măsurare a variabilelor, adică prin mărirea (sau micșorarea) numărului aproximativ se mărește (sau se micșorează) proporțional eroarea lui absolută; numerele $a = 5{,}82$ m cu eroarea absolută $\Delta_a = 0{,}01$ m și $b = 582$ cm cu eroarea absolută $\Delta_b = 1$ cm au aceeași eroare relativă

$$\delta_a = \delta_b = \frac{1}{582} = 0{,}0017 = 0{,}17\%.$$

Eroarea relativă a numărului aproximativ este strîns legată de numărul de cifre corecte. *Numărul de cifre corecte* se socotește de la prima dintre cifrele semnificative pînă

la prima dintre cifrele semnificative ale erorii lui absolute. De exemplu, dacă numărul este $a = 5{,}8247$, iar eroarea absolută este $\Delta_a = 0{,}0034$, atunci numărul a are trei cifre corecte (5, 8, 2), cifrele rămase sînt îndoielnice. Aproximativ se poate considera că prezența numai a unei singure cifre corecte corespunde unei erori de ordinul 10%, a două cifre corecte — unei erori de ordinul 1%, a trei cifre corecte — unei erori de ordinul 0,1% etc.

2. Adunarea și scăderea numerelor aproximative

Eroarea absolută a sumei algebrice a mai multor numere este egală cu suma erorilor absolute ale termenilor: dacă

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

atunci

$$\Delta_S = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}. \tag{3}$$

Pentru un număr mare n de termeni este mai avantajos să se folosească estimațiile, ținînd cont de faptul că prin adunare are loc o compensație parțială a erorilor de semne diferite. Prin adunarea rezultatelor măsurărilor se poate considera că

$$\Delta_S = \sqrt{\Delta_{a_1}^2 + \Delta_{a_2}^2 + \ldots + \Delta_{a_n}^2}. \tag{4}$$

La adunarea numerelor rotunjite (după regula completării) pînă la a m-a zecimală, adică rotunjite cu o eroare mai mică decît $0{,}5 \cdot 10^{-m}$ se aplică regula lui Cebotarev:

$$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}, \qquad (n > 10). \tag{5}$$

Cînd se adună mai multe numere, dintre care unul are o eroare absolută semnificativ mai mare decît toate celelalte, se poate considera că eroarea sumei este egală cu această eroare maximă. Pentru aceasta în sumă este rațional să se păstreze atîtea zecimale, cîte are termenul cu cea mai mare eroare.

Eroarea relativă a sumei mai multor numere de același semn este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare dintre erorile relative ale termenilor :

$$\min \delta_{a_k} \leqslant \delta_s \leqslant \max \delta_{a_k}, \ (a_k > 0 ; \ k = 1, 2, \ldots, n). \quad (6)$$

Însă dacă se adună numere de semne diferite (adică la scădere), se observă o pierdere a preciziei : eroarea relativă a diferenței a două numere pozitive este mai mare decît erorile relative ale acestor numere, mai ales dacă aceste numere sînt apropiate unul de altul (adică dacă diferența lor este foarte mică în comparație cu aceste numere).

De exemplu să presupunem date numerele

$$a = 28{,}35, \qquad \Delta_a = 0{,}01,$$

$$b = 28{,}11, \qquad \Delta_b = 0{,}01.$$

Erorile lor relative sînt egale cu $\delta_a = \delta_b = 0{,}036\,\%$. Pe de altă parte, diferența lor $c = a - b = 0{,}24$ are eroarea relativă

$$\delta_c = \frac{0{,}02}{0{,}24} \cdot 100\,\% = 8{,}4\,\%,$$

care depășește de 233 ori erorile relative ale numerelor a și b.

Urmează de aici a se evita pe cît posibil scăderea numerelor apropiate, transformînd în mod convenabil schema de calcul.

3. Înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative

La înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative se adună erorile lor relative (nu absolute); eroarea relativă a expresiei

$$r = \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_n} \quad (7)$$

se estimează prin

$$\delta_r = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_m} + \delta_{b_1} + \ldots + \delta_{b_n}. \quad (8)$$

Pentru un număr mare de $m + n$ numere este mai avantajos să se folosească estimațiile, ținînd cont de faptul că are loc o compensație a erorilor de semne diferite. Dacă numerele a_i, b_j s-au obținut în urma măsurărilor, atunci se poate considera că

$$\delta_r = \sqrt{\delta_{a_1}^2 + \ldots + \delta_{a_m}^2 + \delta_{b_1}^2 + \ldots + \delta_{b_n}^2}. \quad (9)$$

Dacă numerele a_i, b_j s-au rotunjit pînă la același număr de cifre corecte și deci au aceeași eroare relativă δ, atunci eroarea relativă a expresiei (7) se estimează prin

$$\delta_r = \sqrt{3\ (n + m)}\ \delta, \ (n + m > 10). \quad (10)$$

Dacă eroarea relativă a unuia dintre numerele a_i, b_j este semnificativ mai mare decît celelalte, atunci se poate considera că eroarea relativă a expresiei (7) este egală cu cea mai mare eroare relativă. De aceea în rezultat este rațional să se păstreze atîtea cifre (cifre semnificative), cîte are cel mai puțin precis dintre numere (adică atîtea cîte are numărul cu cea mai mare eroare relativă).

Eroarea absolută a produsului, a cîtului și a expresiei generale (7) se calculează cu ajutorul erorii sale relative :

$$\Delta_r = |r|\ \delta_r.$$

4. Erorile de calcul ale funcțiilor

Eroarea absolută a funcției derivabile $y = f(x)$, provocată de o eroare suficient de mică a argumentului Δ_x, se estimează prin

$$\Delta_y = |f'(x)|\ \Delta_x. \quad (11)$$

Această estimație se aplică în cazurile, cînd valoarea maximă a expresiei $|f''(x)|$ în intervalul $(x-\Delta_x, x+\Delta_x)$ constituie cel mult 10% din valoarea raportului $\frac{|f'(x)|}{\Delta_x}$.

Erorile funcțiilor logaritmice. Eroarea absolută a logaritmului natural al unei mărimi este egală cu eroarea relativă a acestei mărimi:

$$\Delta_{\ln x} = \frac{\Delta_x}{x} = \delta_x. \tag{12}$$

Eroarea absolută a logaritmului zecimal al unei mărimi $\lg x = 0{,}4343 \ln x$ constituie aproximativ 43% din eroarea relativă a acestei mărimi

$$\Delta_{\lg x} = 0{,}4343\, \delta_x.$$

De aceea este rațional să se folosească acele tabele de logaritmi, în care numărul de cifre zecimale ale mantisei este cu o unitate mai mare decît numărul cifrelor corecte ale numărului logaritmat. De exemplu dacă calculul se efectuează cu numere ce conțin trei cifre corecte, atunci trebuie să se utilizeze tabele de logaritmi cu patru cifre.

Erorile funcțiilor putere și funcțiilor exponențiale. Eroarea relativă a funcției putere $y = x^m$ este proporțională cu eroarea argumentului:

$$\delta_y = |m|\, \delta_x, \tag{13}$$

iar eroarea relativă a funcției exponențiale $z = a^x$ este proporțională cu eroarea absolută a argumentului:

$$\delta_z = \ln a \cdot \Delta_x. \tag{14}$$

Erorile funcțiilor trigonometrice. Erorile absolute și relative ale funcțiilor $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$ se estimează în modul următor:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\, \Delta_x < \Delta_x, \quad \delta_{\sin x} = |\operatorname{ctg} x|\, \Delta_x,$$

$$\Delta_{\cos x} = |\sin x|\, \Delta_x < \Delta_x, \quad \delta_{\cos x} = |\operatorname{tg} x|\, \Delta_x,$$

$$\Delta_{\operatorname{tg} x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, \Delta_x > \Delta_x, \quad \delta_{\operatorname{tg} x} = (|\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x|)\, \Delta_x.$$

Se observă imediat că eroarea absolută a sinusului și cosinusului nu depășesc eroarea absolută a argumentului.

Eroarea absolută a diferențialei totale a funcției de mai multe variabile $u = f(x, y, z, \ldots)$, provocată de erorile suficient de mici ale argumentelor, se estimează prin

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta_y + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \Delta_z + \ldots \tag{15}$$

5. Erorile tabelelor de diferențe

Dacă toate valorile funcției y_k din tabel sînt rotunjite pînă la același ordin, adică au aceeași eroare absolută Δ (de exemplu, $\Delta = 10^{-m}$ sau $\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-m}$), atunci eroarea absolută a diferențelor din tabel se estimează astfel:

Diferența	Eroare absolută
Δy_k	2Δ
$\Delta^2 y_k$	4Δ
$\Delta^3 y_k$	8Δ
...	...

(16)

De obicei odată cu mărirea ordinului diferențelor valorile lor absolute descresc. Dacă pentru toate diferențele de un anumit ordin valorile lor absolute devin mai mici decît erorile lor indicate în tabelul (16), atunci diferențele corespunzătoare se consideră practic egale cu zero și în calcule acestea se neglijează.

Dacă una din valorile din tabel are o eroare mare ε, superioară semnificativ erorilor posibile de rotunjire, atunci această eroare denaturează vizibil comportarea diferențelor din tabel, ceea ce permite să se descopere locul erorii. În acest scop se aplică următoarea schemă de

răspîndire a erorilor în tabelul diagonal al diferențelor :

x	Diferențe			
	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
...	...	...	...	...
y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$
y_{-1}	$\Delta y_{-1}+\varepsilon$	$\Delta^2 y_{-1}+\varepsilon$	-3ε	-4ε
$y_0+\varepsilon$	$\Delta y_0-\varepsilon$	$\Delta^2 y_0-2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+6\varepsilon$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0+\varepsilon$	$-\varepsilon$	-4ε
y_2	...	$\Delta^2 y_1$	...	$+\varepsilon$

(În ultimile două coloane pentru simplificarea scrierii sînt indicate numai erorile).

Dacă încălcarea regularității tabelului diferențelor s-a descoperit într-un loc, atunci urmează mai întîi să se verifice calculul diferențelor, după aceea calculul valorilor funcției și dacă eroarea nu a fost descoperită, se elucidează posibilitatea unei anumite particularități în comportarea funcției.

6. Regula conservării semnelor

Pentru a micșora acumularea erorilor de rotunjire în calcule, urmează să se mențină la toate datele nu numai cifre corecte, dar și unele îndoielnice. Numărul cifrelor îndoielnice păstrate depinde de volumul calculelor : dacă numărul de operații efectuate este de ordinul zecilor, se păstrează o cifră sau două cifre îndoilenice, iar dacă numărul de operații este de ordinul sutelor, trebuie să se păstreze două-trei cifre îndoielnice. Păstrarea a două cifre îndoielnice corespunde la rotunjirea erorilor absolute și relative pînă la două cifre semnificative, păstrarea a trei cifre îndoilenice corespunde la rotunjirea erorilor pînă la trei cifre semnificative etc. Urmează să avem în vedere faptul că nu este obligatoriu ca toate cifrele îndoilenice să fie incorecte, căci de obicei estimațiile erorilor sînt exagerate.

Deci în rezultatele finale este util să se păstreze cîte o cifră îndoielnică, indicînd și eroarea absolută (sau relativă) a rezultatului.

7. Formule aproximative

Pentru calcule cu numere aproximative nu are sens să se folosească formule exacte, dacă acestea sînt prea greoaie, sau formule care dau o precizie mai mare decît se poate obține din estimarea datelor inițiale.

Sursa principală de formule aproximative o constituie diferitele serii, în particular seriile Taylor. La folosirea formulelor aproximative trebuie să se acorde o atenție deosebită estimării erorilor lor (de obicei formulele aproximative in intervale distincte au erori diferite). De exemplu, pentru funcțiile putere se aplică formula aproximativă

$$(a+b)^k \approx a^k + k\,a^{k-1}\,b, \tag{17}$$

unde $a>0$, $|b| \ll a$, cu ordinul erorii $\dfrac{k(k-1)}{2}\,a^{k-2}\,b^2$.

În particular, pentru extragerea rădăcinii de ordinul $m>1$ avem

$$\sqrt[m]{c^m+b} \approx c + \frac{1}{m}\frac{b}{c^{m-1}} \tag{18}$$

cu ordinul erorii

$$\frac{m-1}{2c}\left(\frac{1}{m}\frac{b}{c^{m-1}}\right)^2,$$

iar pentru împărțire

$$\frac{1}{a+b} \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$$

cu ordinul erorii

$$\frac{b^2}{a^3} = a\left(\frac{b}{a^2}\right)^2.$$

Exemple

1. Să se extragă rădăcina de ordinul cinci din numărul $x = 30{,}42$, a cărui eroare absolută este $\Delta_x = 0{,}03$.

Aici eroarea relativă a rădăcinii $y=\sqrt[5]{x}=x^{1/5}$ constituie $\delta_y = \frac{1}{5}\delta_x = 0{,}02\%$, prin urmare, eroarea absolută a rădăcinii $y \approx 2$ este $\Delta_y = y \cdot \delta_y = 0{,}0004$. De aceea urmează să extragem rădăcina cu patru zecimale. După formula aproximativă (18) pentru $m = 5$, obținem

$$y = \sqrt[5]{2^5 - 1{,}58} \approx 2 - \frac{1{,}58}{5 \cdot 2^4} = 2 - 0{,}0198 = 1{,}9802$$

cu eroarea de ordinul $\frac{4}{2 \cdot 2}(0{,}02)^2 = 0{,}0004$, care satisface complet cerințele indicate mai sus asupra preciziei.

2. Să se calculeze valoarea inversului numărului $x = 98{,}75$, a cărui eroare absolută este $\Delta_x = 0{,}12$. Aici eroarea relativă a inversului $y = \frac{1}{x} \approx 0{,}01$ este $\delta_y = \delta_x = 0{,}12\%$, iar eroarea absolută $\Delta_y = 10^{-2} \cdot 0{,}12\% = 12 \cdot 10^{-6}$. De aceea urmează să se facă calculele cu șase zecimale.

După formula aproximativă avem

$$y = \frac{1}{100 - 1{,}24} = 0{,}01 + 1{,}24(0{,}01)^2 = 0{,}010124$$

cu eroarea de ordinul $1{,}5\,(0{,}01)^3 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$, care satisface complet cerințele formulate mai înainte asupra preciziei.

ANEXA B

TABELE

Explicații la tabele. Lîngă numărul fiecărui tabel în paranteze este indicat numărul punctului, în care pentru prima dată se face o trimitere la acest tabel și, de obicei, se dau indicații privind utilizarea acestui tabel.

Pentru toate valorile argumentului care nu sînt trecute în tabel, valorile funcției se determină prin interpolare (vezi punctele 6.3.1 și 6.3.5). Forma de interpolare precum și precizia obținută prin aceasta sînt indicate jos sub tabel. În multe cazuri se dovedește suficientă interpolarea liniară fie direct pentru argumentul indicat, adică de forma

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad (x_0 < x < x_1),$$

fie pentru mărimea inversă a argumentului, adică de forma

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{1/x - 1/x_0}{1/x_1 - 1/x_0} = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x_1}{x}, \quad (x_0 < x < x_1).$$

Ultima interpolare este posibilă, în particular, și într-un interval infinit sub forma

$$y(x) = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\frac{x_0}{x}, \quad (x_0 < x < \infty).$$

O astfel de construcție o au formulele de interpolare din tabelele III, IV, VIII și XII. Peste tot valorile funcției sînt notate astfel:

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_\infty = y(\infty).$$

Tabelul I (punctul 1.2.2)

Valorile funcției $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2}\,dt$, $\Phi(-t) = -\Phi(t)$

t	Sutimi de t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

Tabelul admite o interpolare liniară cu o eroare de pînă la 10^{-4}.

Exemplu. Să se calculeze $\Phi(1{,}614)$.

Soluție. Luăm din tabel două valori: $\Phi(1{,}61) = 0{,}4463$ și $\Phi(1{,}62) = 0{,}4474$ cu diferența 0,0011 și deducem corecția la creșterea relativă a argumentului $(1{,}614-1{,}61)/0{,}01 = 0{,}4$:

$$\Phi(1{,}614) = \Phi(1{,}61) + 0{,}0011 \cdot 0{,}4 = 0{,}4467.$$

Continuarea tabelului pentru valorile lui $t \geqslant 2{,}5$ este dată în tabelul II.

Tabelul II (punctul 1.2.2)

Valori legate de probabilitatea $\Phi(t)$; funcția $t = t(\mathscr{P})$ este inversa funcției $\mathscr{P} = 2\Phi(t)$

t	$\Phi(t)$	$1-2\Phi(t)$	$1-\mathscr{P}$	$t = t(\mathscr{P})$	$\mathscr{P}$
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	0,49534	0,00932	0,04	2,054	0,96
2,7	0,49653	0,00693	0,03	2,170	0,97
2,8	0,49744	0,00511	0,02	2,326	0,98
2,9	0,49813	0,00373	0,01	2,576	0,99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	0,49903	0,00194	0,008	2,652	0,992
3,2	0,49931	0,00137	0,007	2,697	0,993
3,3	0,49952	0,00097	0,006	2,748	0,994
3,4	0,49966	0,00067	0,005	2,807	0,995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	0,499841	0,000318	0,003	2,968	0,997
3,7	0,499892	0,000216	0,002	3,090	0,998
3,8	0,499927	0,000145	0,001	3,291	0,999
3,9	0,499952	0,000096	0,0009	3,320	0,9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	0,499979	0,000041	0,0007	3,390	0,9993
4,2	0,499987	0,000027	0,0006	3,432	0,9994
4,3	0,499991	0,000017	0,0005	3,481	0,9995
4,4	0,499995	0,000011	0,0004	3,540	0,9996
4,5	0,4999966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	0,4999979	0,0000041	0,0002	3,720	0,9998
4,7	0,4999987	0,0000025	0,0001	3,891	0,9999
4,8	0,4999992	0,0000016	10^{-5}	4,417	$1-10^{-5}$
4,9	0,4999995	0,0000009	10^{-6}	4,892	$1-10^{-6}$
5,0	0,4999997	0,0000006	10^{-7}	5,327	$1-10^{-7}$

În tabelul valorilor funcției $\Phi(t)$ eroarea de interpolare liniară descrește cînd valorile lui t cresc; ea nu depășește: 10^{-4} în intervalul (2,5; 3,2); 10^{-5} în intervalul (3,2; 3,9); 10^{-6} în intervalul (3, 9; 4,5); 10^{-7} în intervalul (4,5; 5,0).

În tabelul valorilor $t(\mathscr{P})$ nu se face interpolare.

Tabelul III (punctul 1.3.2)

Valorile critice $t_n(\mathscr{P})$ ale raportului (1.13) pentru eliminarea valorilor „excepționale" x_* (n este numărul rezultatelor acceptate, iar $\mathscr{P}$ nivelul de încredere)

n \ $\mathscr{P}$	0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43
6	2,78	3,64	4,36	7,41
7	2,62	3,36	3,96	6,37
8	2,51	3,18	3,71	5,73
9	2,43	3,05	3,54	5,31
10	2,37	2,96	3,41	5,01
11	2,33	2,89	3,31	4,79
12	2,29	2,83	3,23	4,62
13	2,26	2,78	3,17	4,48
14	2,24	2,74	3,12	4,37
15	2,22	2,71	3,08	4,28
16	2,20	2,68	3,04	4,20
17	2,18	2,66	3,01	4,13
18	2,17	2,64	2,98	4,07

n \ $\mathscr{P}$	0,95	0,98	0,99	0,999
20	2,145	2,602	2,932	3,979
25	2,105	2,541	2,852	3,819
30	2,079	2,503	2,802	3,719
35	2,061	2,476	2,768	3,652
40	2,048	2,456	2,742	3,602
45	2,038	2,441	2,722	3,565
50	2,030	2,429	2,707	3,532
60	2,018	2,411	2,683	3,492
70	2,009	2,399	2,667	3,462
80	2,003	2,389	2,655	3,439
90	1,998	2,382	2,646	3,423
100	1,994	2,377	2,639	3,409
∞	1,960	2,326	2,576	3,291

Interpolarea liniară după argumentul n poate da o eroare de pînă la 10^{-2} pentru $20<n<60$ și o eroare de pînă la 10^{-3} pentru $60<n<100$.

Pentru $n>100$ valorile critice $t_n(\mathscr{P})$ se pot calcula cu o precizie de pînă la 10^{-3} cu relația

$$t_n(\mathscr{P}) = t_\infty(\mathscr{P}) + \frac{t_{100}(\mathscr{P}) - t_\infty(\mathscr{P})}{n} \cdot 100.$$

De exemplu, pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $n = 200$ avem:

$$t_{200}(0{,}99) = 2{,}576 + \frac{2{,}639 - 2{,}576}{200} \cdot 100 = 2{,}576 + 0{,}031 = 2{,}607.$$

Tabelul IV (punctul 2.2.3)

Repartiția Student. Valorile $t = t(\mathscr{P}; k)$

k \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	3,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Interpolarea valorilor $t(\mathscr{P}; k)$ este permisă numai pentru argumentul k. Pentru $16<k<60$ eroarea de interpolare liniară nu depășește $7 \cdot 10^{-3}$ pentru $\mathscr{P} = 0{,}999$, $4 \cdot 10^{-3}$ pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $2 \cdot 10^{-3}$ pentru $\mathscr{P} \leqslant 0{,}98$. Pentru $60<k<100$ eroarea de interpolare liniară nu depășește 10^{-3}. Pentru $k>100$ cu o precizie de 10^{-3} are loc formula

$$t(\mathscr{P}; k) = t(\mathscr{P}; \infty) + \frac{100}{k} [t(\mathscr{P}; 100) - t(P; \infty)].$$

De exemplu, pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $k>100$ avem

$$t(0{,}99; k) = 2{,}576 + \frac{100}{k} \cdot 0{,}050.$$

Tabelul V (punctul 2.4.2)

Coeficienții $q = q(\mathscr{P}; k)$ pentru estimația (2.40)

k \ $\mathscr{P}$	0,95	0,99	0,999	k \ $\mathscr{P}$	0,95	0,99	0,999
17	0,400	0,639	0,961	55	0,196	0,280	0,398
18	0,385	0,602	0,916	60	0,187	0,266	0,375
19	0,371	0,578	0,875	65	0,179	0,253	0,356
20	0,358	0,556	0,838	70	0,172	0,242	0,339
22	0,336	0,518	0,776	80	0,160	0,224	0,311
24	0,318	0,487	0,724	90	0,150	0,209	0,289
26	0,302	0,460	0,679	100	0,142	0,196	0,271
28	0,288	0,437	0,641	110	0,135	0,186	0,257
30	0,276	0,416	0,609	120	0,129	0,177	0,246
35	0,253	0,375	0,544	150	0,115	0,159	0,220
40	0,234	0,343	0,494	200	0,099	0,135	0,184
45	0,219	0,318	0,455	250	0,089	0,120	0,162
50	0,207	0,297	0,424	300	0,081	0,109	0,146

Interpolarea valorilor $q(\mathscr{P}; k)$ este permisă numai după argumentul k. Pentru $k<150$ eroarea de interpolare liniară nu depășește 10^{-3} pentru $\mathscr{P} = 0{,}95$ și $\mathscr{P} = 0{,}99$, și $2 \cdot 10^{-3}$ pentru $\mathscr{P} = 0{,}999$.

Dacă $k>150$ pentru calcularea valorilor $q(\mathscr{P}; k)$ cu o precizie de pînă la 10^{-3} se pot utiliza formulele aproximative:

$$q(0{,}95; k) = \frac{1{,}40}{\sqrt{k}}, \qquad q(0{,}99; k) = \frac{1{,}83 + 16/k}{\sqrt{k}},$$

$$q(0{,}999; k) = \frac{2{,}33 + 60/k - 800/k^2}{\sqrt{k}}.$$

De exemplu, pentru $k = 169$ ($\sqrt{k} = 13$) aceste formule dau

$q(0{,}95; 169) = 0{,}108$, $q(0{,}99; 169) = 0{,}148$,

$q(0{,}999; 169) = 0{,}204$;

pentru $k = 400$ ($\sqrt{k} = 20$) aceste formule dau

$q(0{,}95; 400) = 0{,}070$, $q(0{,}99; 400) = 0{,}093$,
$q(0{,}999; 400) = 0{,}124$.

Tabelul VI (punctul 2.4.2)

Coeficienții $z_1(\mathscr{P}; k)$ și $z_2(\mathscr{P}; k)$ pentru estimația (2.41)

k \ $\mathscr{P}$	0,90		0,95		0,98		0,99	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
4	0,649	2,37	0,599	2,87	0,549	3,67	0,519	4,39
5	0,672	2,090	0,624	2,453	0,576	3,004	0,546	3,484
6	0,690	1,916	0,644	2,202	0,597	2,623	0,569	2,979
7	0,705	1,797	0,661	2,035	0,616	2,377	0,588	2,660
8	0,718	1,711	0,675	1,916	0,631	2,205	0,604	2,440
9	0,729	1,645	0,688	1,826	0,644	2,076	0,618	2,277
10	0,739	1,593	0,699	1,755	0,656	1,977	0,630	2,154
11	0,748	1,550	0,708	1,698	0,667	1,898	0,641	2,056
12	0,755	1,515	0,717	1,651	0,677	1,833	0,651	1,976
13	0,762	1,485	0,725	1,611	0,685	1,779	0,660	1,910
14	0,769	1,460	0,732	1,577	0,693	1,733	0,669	1,854
15	0,775	1,437	0,739	1,548	0,700	1,694	0,676	1,806
16	0,780	1,418	0,745	1,522	0,707	1,659	0,683	1,764
18	0,790	1,385	0,756	1,479	0,719	1,602	0,696	1,695
20	0,798	1,358	0,765	1,444	0,730	1,556	0,707	1,640
22	0,805	1,335	0,773	1,416	0,739	1,519	0,717	1,595
24	0,812	1,316	0,781	1,391	0,747	1,487	0,726	1,558
26	0,818	1,300	0,788	1,371	0,755	1,460	0,734	1,526
28	0,823	1,286	0,794	1,352	0,762	1,436	0,741	1,499
30	0,828	1,274	0,799	1,337	0,768	1,417	0,748	1,475
35	0,838	1,248	0,811	1,304	0,781	1,376	0,762	1,428
40	0,847	1,228	0,821	1,279	0,792	1,344	0,774	1,390
45	0,854	1,212	0,830	1,259	0,802	1,318	0,784	1,360
50	0,861	1,199	0,837	1,243	0,810	1,297	0,793	1,336
60	0,871	1,179	0,849	1,217	0,824	1,265	0,808	1,299

Interpolarea valorilor $z_1(\mathscr{P}; k)$, $z_2(\mathscr{P}; k)$ este permisă numai după argumentul k. Eroarea de interpolare liniară nu depășește 10^{-3}.

De exemplu, pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $k = 55$ avem:

$z_1(0{,}99; 55) = 0{,}793 + 0{,}015 \cdot 0{,}5 = 0{,}801$,

$z_2(0{,}99; 55) = 1{,}336 + (-0{,}037) \cdot 0{,}5 = 1{,}317$.

Tabelul VII (punctul 2.5.1)

Valorile critice ale raportului F (2.43) pentru nivelul de încredere 0,95 (caractere obișnuite) și 0,99 (caractere aldine)

k_2 \ k_1	4	6	8	10	15	20	30	40	50	100	∞
6	4,53	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
	9,15	**8,47**	**8,10**	**7,87**	**7,56**	**7,39**	**7,23**	**7,14**	**7,09**	**6,99**	**6,89**
7	4,12	3,87	3,73	3,63	3,50	3,44	3,38	3,34	3,32	3,28	3,23
	7,85	**7,19**	**6,84**	**6,62**	**6,31**	**6,15**	**5,98**	**5,90**	**5,85**	**5,75**	**5,65**
8	3,84	3,58	3,44	3,34	3,21	3,15	3,08	3,05	3,03	2,98	2,93
	7,01	**6,37**	**6,03**	**5,82**	**5,52**	**5,36**	**5,20**	**5,11**	**5,06**	**4,96**	**4,86**
9	3,63	3,37	3,23	3,13	3,00	2,93	2,86	2,82	2,80	2,76	2,71
	6,42	**5,80**	**5,47**	**5,26**	**4,96**	**4,80**	**4,64**	**4,56**	**4,51**	**4,41**	**4,31**
10	3,48	3,22	3,07	2,97	2,84	2,77	2,70	2,67	2,64	2,59	2,54
	5,99	**5,39**	**5,06**	**4,85**	**4,56**	**4,41**	**4,25**	**4,17**	**4,12**	**4,01**	**3,91**
12	3,26	3,00	2,85	2,76	2,62	2,54	2,46	2,42	2,40	2,35	2,30
	5,41	**4,82**	**4,50**	**4,30**	**4,01**	**3,86**	**3,70**	**3,61**	**3,56**	**3,46**	**3,36**
14	3,11	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
	5,03	**4,46**	**4,14**	**3,94**	**3,66**	**3,51**	**3,34**	**3,26**	**3,21**	**3,11**	**3,00**
16	3,01	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,20	2,16	2,13	2,07	2,01
	4,77	**4,20**	**3,89**	**3,69**	**3,41**	**3,25**	**3,10**	**3,01**	**2,96**	**2,86**	**2,75**
18	2,93	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	2,07	2,04	1,98	1,92
	4,58	**4,01**	**3,71**	**3,51**	**3,23**	**3,07**	**2,91**	**2,83**	**2,78**	**2,68**	**2,57**
20	2,87	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,96	1,90	1,84
	4,43	**3,87**	**3,56**	**3,37**	**3,09**	**2,94**	**2,77**	**2,69**	**2,63**	**2,53**	**2,42**
22	2,82	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,93	1,91	1,84	1,78
	4,31	**3,76**	**3,45**	**3,26**	**2,98**	**2,83**	**2,67**	**2,58**	**2,53**	**2,42**	**2,31**
24	2,78	2,51	2,36	2,26	2,11	2,02	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
	4,22	**3,67**	**3,36**	**3,17**	**2,89**	**2,74**	**2,58**	**2,49**	**2,44**	**2,33**	**2,21**
26	2,74	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,69
	4,14	**3,59**	**3,29**	**3,09**	**2,81**	**2,66**	**2,50**	**2,41**	**2,36**	**2,25**	**2,13**
30	2,69	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
	4,02	**3,47**	**3,17**	**2,98**	**2,70**	**2,55**	**2,38**	**2,29**	**2,24**	**2,13**	**2,01**
35	2,64	2,37	2,22	2,11	1,96	1,88	1,79	1,73	1,70	1,63	1,56
	3,91	**3,36**	**3,06**	**2,87**	**2,60**	**2,45**	**2,28**	**2,19**	**2,13**	**2,02**	**1,89**
40	2,61	2,34	2,18	2,07	1,92	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
	3,83	**3,29**	**2,99**	**2,80**	**2,52**	**2,37**	**2,20**	**2,11**	**2,05**	**1,94**	**1,81**
50	2,56	2,29	2,13	2,02	1,87	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
	3,72	**3,18**	**2,88**	**2,70**	**2,42**	**2,26**	**2,10**	**2,00**	**1,94**	**1,82**	**1,68**
100	2,46	2,19	2,03	1,92	1,77	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
	3,51	**2,99**	**2,69**	**2,51**	**2,22**	**2,06**	**1,89**	**1,79**	**1,73**	**1,59**	**1,43**
∞	2,37	2,09	1,94	1,83	1,66	1,57	1,46	1,40	1,35	1,24	1,00
	3,32	**2,80**	**2,51**	**2,32**	**2,03**	**1,87**	**1,69**	**1,59**	**1,52**	**1,36**	**1,00**

Tabelul permite o interpolare liniară după argumentul k_2 și o interpolare pătratică după argumentul k_1 cu o eroare pînă la 0,01.

Tabelul VIII (punctul 2.5.2)

Valorile critice ale raportului G (2.44) pentru nivelul de încredere 0,95) caractere obișnuite) și 0,99 (caractere aldine)

m \ k	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
5	0,544	0,507	0,478	0,439	0,412	0,365	0,307	0,251	0,200
	0,633	**0,588**	**0,553**	**0,504**	**0,470**	**0,409**	**0,335**	**0,264**	**0,200**
6	0,480	0,445	0,418	0,382	0,357	0,314	0,261	0,212	0,167
	0,564	**0,520**	**0,487**	**0,440**	**0,408**	**0,353**	**0,286**	**0,223**	**0,167**
7	0,431	0,397	0,373	0,338	0,315	0,276	0,228	0,183	0,143
	0,508	**0,466**	**0,435**	**0,391**	**0,362**	**0,311**	**0,249**	**0,193**	**0,143**
8	0,391	0,360	0,336	0,304	0,283	0,246	0,202	0,162	0,125
	0,463	**0,427**	**0,393**	**0,352**	**0,325**	**0,278**	**0,221**	**0,170**	**0,125**
9	0,358	0,329	0,307	0,277	0,257	0,223	0,182	0,145	0,111
	0,425	**0,387**	**0,359**	**0,321**	**0,295**	**0,251**	**0,199**	**0,152**	**0,111**
10	0,331	0,303	0,282	0,254	0,235	0,203	0,166	0,131	0,100
	0,393	**0,357**	**0,331**	**0,295**	**0,270**	**0,230**	**0,181**	**0,138**	**0,100**
15	0,242	0,220	0,203	0,182	0,167	0,143	0,114	0,089	0,067
	0,288	**0,259**	**0,239**	**0,210**	**0,192**	**0,161**	**0,125**	**0,093**	**0,067**
20	0,192	0,174	0,160	0,142	0,130	0,111	0,088	0,068	0,050
	0,229	**0,205**	**0,188**	**0,165**	**0,150**	**0,125**	**0,096**	**0,071**	**0,050**
30	0,138	0,124	0,114	0,100	0,092	0,077	0,060	0,046	0,033
	0,164	**0,145**	**0,133**	**0,116**	**0,105**	**0,087**	**0,066**	**0,048**	**0,033**
40	0,108	0,097	0,089	0,078	0,071	0,060	0,046	0,035	0,025
	0,128	**0,114**	**0,103**	**0,090**	**0,082**	**0,067**	**0,050**	**0,036**	**0,025**
60	0,077	0,068	0,062	0,055	0,050	0,041	0,032	0,023	0,017
	0,090	**0,080**	**0,072**	**0,063**	**0,057**	**0,046**	**0,034**	**0,025**	**0,017**
120	0,042	0,037	0,034	0,029	0,027	0,022	0,017	0,012	0,008
	0,049	**0,043**	**0,039**	**0,033**	**0,030**	**0,024**	**0,018**	**0,013**	**0,008**

Este permisă interpolarea în raport cu argumentul m cu o precizie de pînă la 10^{-3} după formula

$$G(m) = G(m_0) + [G(m_1) - G(m_0)]\,\frac{m-m_0}{m_1-m_0}\cdot\frac{m_1}{m}, \quad (m_0<m<m_1).$$

De exemplu, pentru $k = 4$, $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $m = 50$ valoarea critică $G(50)$ se află cu ajutorul valorilor critice $G(40) = 0{,}128$ și $G(60) = 0{,}090$ astfel:

$$G(50) = 0{,}128 - 0{,}038\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{60}{50} = 0{,}105.$$

Pentru $m>120$ valorile $G(m)$ se pot calcula cu formula

$$G(m) = G(120)\cdot\frac{120}{m},$$

Tabelul IX (punctul 2.6.1)

Valorile critice χ^2 pentru nivelul de încredere $\mathscr{P}$ și numărul de grade de libertate k

k \ $\mathscr{P}$	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,9	16,9	18,5
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,3	18,9	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,80	12,02	14,07	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,24	14,68	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,44	15,99	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,63	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,7	35,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,2	37,1	39,3
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,1	45,3
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,7	45,9	48,3
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,7	51,2
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,2	51,5	54,1
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,3	56,9
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,1	59,7

Pentru $k > 30$ pentru valorile critice χ^2 se pot utiliza valorile aproximative $k\left(1-\frac{2}{9k}+t(\mathscr{P})\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3$, unde $t(\mathscr{P})$ se ia din tabelul II (pag. 195). De exemplu, pentru $\mathscr{P}=0{,}99$ avem $t(0{,}99)=2{,}576$; de aceea pentru $k=100$ valoarea critică χ^2 este egală cu

$$100\left(1-\frac{2}{900}+2{,}576\sqrt{\frac{2}{900}}\right)^3 = 100\cdot 1{,}119^3 \approx 140\,.$$

Tabelul X (punctele 3.2.1 și 3.2.2)

Valorile mărimilor $H_1(N)=\frac{N(N^2-1)}{12}$ și $H_2(N)=\frac{N(N^2-1)(N^2-4)}{180}$ pentru calcularea dependențelor liniare și pătratice după formulele (3.10) – (3.12) și (3.17) – (3.19)

N (impar)	$H_1(N)$	$3H_2(N)$	N (par)	$2H_1(N)$	$12H_2(N)$
5	10	42	6	35	448
7	28	252	8	84	2 016
9	60	924	10	165	6 336
11	110	2 574	12	286	16 016
13	182	6 006	14	455	34 944
15	280	12 376	16	680	68 544
17	408	23 256	18	969	124 032
19	570	40 698	20	1 330	210 672
21	770	67 298	22	1 771	340 032
23	1012	106 260	24	2 300	526 240
25	1300	161 460	26	2 925	786 240
27	1638	237 510	28	3 654	1 140 048
29	2030	339 822	30	4 495	1 611 008
31	2480	474 672	32	5 456	2 226 048
33	2992	649 264	34	6 545	3 015 936
35	3570	871 794	36	7 770	4 015 536
37	4218	1 151 514	38	9 139	5 264 064
39	4940	1 498 796	40	10 660	6 805 344
41	5740	1 925 196	42	12 341	8 688 064
43	6622	2 443 518	44	14 190	10 966 032
45	7590	3 067 878	46	16 215	13 698 432
47	8648	3 813 768	48	18 424	16 950 080
49	9800	4 698 120	50	20 825	20 791 680

Tabelul XI (punctele 3.3.1 și 3.3.3)

Valorile polinoamelor ortogonale Cebișev *

Pentru cinci puncte

$N = 5 = H_0$

$P_1 = u = p_1^*, \quad P_2 = u^2 - 2 = p_2^*,$

$$P_3 = u^3 - \frac{17}{5}u = \frac{6}{5}p_3^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*
0	0	−2	0
1	1	−1	−2
2	2	2	1
Υ	10	14	12
H	10	14	72/5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	2	$1\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{35}$

Pentru șase puncte

$N = 6 = H_0$

$$P_1 = u = \frac{1}{2}p_1^*, \quad P_2 = u^2 - \frac{35}{12} = \frac{2}{3}p_2^*,$$

$$P_3 = u^3 - \frac{101}{20}u = \frac{3}{5}p_3^*,$$

$$P_4 = u^4 - \frac{95}{14}u^2 + \frac{81}{16} = \frac{12}{7}p_4^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*
1/2	1	−4	−4	2
3/2	3	−1	−7	−3
5/2	5	5	5	1
Υ	35	56	108	48
H	35/2	112/3	324/5	576/7
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$2\frac{11}{12}$	$2\frac{2}{15}$	$1\frac{103}{140}$	$1\frac{17}{63}$

* $p_j(u)$ sînt polinoamele de grad j, ortogonale pe mulțimea punctelor

$u = \begin{cases} 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (N-1)/2 \text{ pentru } N \text{ impar}, \\ \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \pm (N-1)/2 \text{ pentru } N \text{ par}; \end{cases}$

$p_j^*(u) = p_j(u)/\mu_j$ sînt polinoame reduse; $H_j = \sum_u p_j^2(u)$

(suma se efectuează după toate punctele); $\Upsilon_j = H_j/\mu_j$

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru șapte puncte

$N = 7 = H_0,$

$P_1 = u = p_1^*, \quad P_2 = u^2 - 4 = p_2^*,$

$P_3 = u^3 - 7u = 6p_3^*,$

$$P_4 = u^4 - \frac{67}{7}u^2 + \frac{72}{7} = \frac{12}{7}p_4^*$$

$$P_5 = u^5 - \frac{35}{3}u^3 + \frac{524}{21}u = \frac{20}{7}p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−4	0	6	0
1	1	−3	−1	1	5
2	2	0	−1	−7	−4
3	3	5	1	3	1
Υ	28	84	36	264	240
H	28	84	216	3168/7	4800/7
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	4	3	$2\frac{4}{7}$	$2\frac{2}{21}$	$1\frac{17}{33}$

Pentru opt puncte

$N = 8 = H_0$

$$P_1 = u = \frac{1}{2}p_1^*, \quad P_2 = u^2 - \frac{21}{4} = p_2^*,$$

$$P_3 = u^3 - \frac{37}{4}u = \frac{3}{2}p_3^*,$$

$$P_4 = u^4 - \frac{179}{14}u^2 + \frac{297}{16} = \frac{12}{7}p_4^*,$$

$$P_5 = u^5 - \frac{95}{6}u^3 + \frac{15\,709}{336}u = \frac{10}{7}p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−5	−3	9	15
3/2	3	−3	−7	−3	17
5/2	5	1	−5	−13	−23
7/2	7	7	7	7	7
Υ	84	168	396	1056	3120
H	42	168	594	12 672/7	31 200/7
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$5\frac{1}{4}$	4	$3\frac{15}{28}$	$3\frac{1}{21}$	$2\frac{61}{132}$

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru nouă puncte

$N = 9 = H_0$

$$p_1 = u = p_1^*, \quad p_2 = u^2 - \frac{20}{3} = \frac{1}{3} p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - \frac{59}{5} u = \frac{6}{5} p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - \frac{115}{7} u^2 + \frac{216}{7} = \frac{12}{7} p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - \frac{185}{9} u^3 + \frac{716}{9} u = \frac{20}{3} p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−20	0	18	0
1	1	−17	− 9	9	9
2	2	− 8	−13	−11	4
3	3	7	− 7	−21	−11
4	4	28	14	14	4
Υ	60	924	1188	3432	3120
H	60	308	$\frac{7128}{5}$	$\frac{41\,184}{7}$	20 800
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{15}$	$4\frac{22}{35}$	$4\frac{8}{63}$	$3\frac{53}{99}$

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru zece puncte

$N = 10 = H_0$,

$$p_1 = u = \frac{1}{2} p_1^*, \quad p_2 = u^2 - \frac{33}{4} = 2 p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - \frac{293}{20} u = \frac{3}{5} p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - \frac{41}{2} u^2 + \frac{3861}{80} = \frac{12}{5} p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - \frac{155}{6} u^3 + \frac{6067}{48} u = 10\, p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−4	−12	18	6
3/2	3	−3	−31	3	11
5/2	5	−1	−35	−17	1
7/2	7	2	−14	−22	−14
9/2	9	6	42	18	6
Υ	165	264	5148	6864	7 800
H	$\frac{165}{2}$	528	$\frac{15\,444}{5}$	$\frac{82\,368}{5}$	78 000
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$8\frac{1}{4}$	$6\frac{2}{5}$	$5\frac{17}{20}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{97}{132}$

Pentru unsprezece puncte

$N = 11 = H_0$,

$$p_1 = u = p_1^*, \quad p_2 = u^2 - 10 = p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - \frac{89}{5} u = \frac{6}{5} p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - 25\, u^2 + 72 = 12\, p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - \frac{95}{3} u^3 + \frac{572}{3} u = 40\, p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−10	0	6	0
1	1	−9	−14	4	4
2	2	−6	−23	−1	4
3	3	−1	−22	−6	−1
4	4	6	− 6	−6	−6
5	5	15	30	6	3
Υ	110	858	5148	3432	6240
H	110	858	$\frac{30\,888}{5}$	41 184	249 600
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	10	$7\frac{4}{5}$	$7\frac{1}{5}$	$6\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{33}$

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru douăsprezece puncte

$N = 12 = H_0$,

$$p_1 = u = \frac{1}{2} p_1^*, \quad p_2 = u^2 - \frac{143}{12} = \frac{1}{3} p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - 21\frac{1}{4} u = \frac{3}{2} p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - 29\frac{13}{14} u^2 - 103\frac{47}{112} = \frac{24}{7} p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - 38\frac{1}{18} u^3 + 276\frac{76}{144} u = \frac{20}{3} p_5^*$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−35	− 7	28	20
3/2	3	−29	−19	12	44
5/2	5	−17	−25	−13	29
7/2	7	1	−21	−33	−21
9/2	9	25	− 3	−27	−57
11/2	11	55	33	33	33
Υ	286	4004	7722	27 456	106 080
H	143	$\frac{4004}{3}$	11 583	$\frac{658\,944}{7}$	707 200
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$11\frac{11}{12}$	$9\frac{1}{3}$	$8\frac{19}{28}$	$8\frac{8}{63}$	$7\frac{203}{396}$

Pentru treisprezece puncte

$N = 13 = H_0$,

$p_1 = u = p_1^*$, $p_2 = u^2 - 14 = p_2^*$,

$p_3 = u^3 - 25u = 6p_3^*$,

$p_4 = u^4 - 35\frac{2}{7}u^2 + 144 = \frac{12}{7}p_4^*$,

$p_5 = u^5 - 45u^3 + 386\frac{6}{7}u = \frac{120}{7}p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−14	0	84	0
1	1	−13	−4	64	20
2	2	−10	−7	11	26
3	3	−5	−8	−54	−11
4	4	2	−6	−96	−18
5	5	11	0	−66	−33
6	6	22	11	99	22
Υ	182	2002	3432	116 688	106 080
H	182	2002	20 592	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	14	11	$10\frac{2}{7}$	$9\frac{5}{7}$	$9\frac{1}{11}$

$H_4 = 200\,036\frac{4}{7}$; $H_5 = 1\,818\,514\frac{2}{7}$.

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru paisprezece puncte

$N = 14 = H_0$,

$p_1 = u = \frac{1}{2}p_1^*$, $p_2 = u^2 - \frac{65}{4} = 2p_2^*$,

$p_3 = u^3 - 29\frac{1}{20}u = \frac{3}{5}p_3^*$,

$p_4 = u^4 - 41\frac{1}{14}u^2 + 195\frac{39}{112} = \frac{12}{7}p_4^*$,

$p_5 = u^5 - 52\frac{1}{2}u^3 + 527\frac{39}{112}u = \frac{30}{7}p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−8	−24	108	60
3/2	3	−7	−67	63	145
5/2	5	−5	−95	− 13	139
7/2	7	−2	−98	− 92	28
9/2	9	2	−66	−132	−132
11/2	11	7	11	−77	−187
13/2	13	13	143	143	143
Υ	455	1456	58 344	233 376	1 007 760
H	227,5	2912	35 006,4	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$16\frac{1}{4}$	$12\frac{4}{5}$	$12\frac{3}{140}$	$11\frac{3}{7}$	$10\frac{35}{44}$

$H_4 = 400\,073\frac{1}{7}$; $H_5 = 4\,318\,971\frac{3}{7}$.

Pentru cincisprezece puncte

$N = 15 = H_0$,

$p_1 = u = p_1^*$, $p_2 = u^2 - \frac{56}{3} = \frac{1}{3}p_2^*$

$p_3 = u^3 - 33,4u = \frac{6}{5}p_3^*$,

$p_4 = u^4 - 47\frac{2}{7}u^2 + 259,2 = \frac{12}{35}p_4^*$,

$p_5 = u^5 - 60\frac{5}{9}u^3 + 702\frac{26}{63}u = \frac{20}{21}p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−56	0	756	0
1	1	−53	−27	621	675
2	2	−44	−49	251	1000
3	3	−29	−61	−249	751
4	4	−8	−58	−704	−44
5	5	19	−35	−869	−979
6	6	52	13	−429	−1144
7	7	91	91	1001	1001
Υ	280	12 376	47 736	2 217 072	10 077 600
H	280	$4125\frac{1}{3}$	57 283,2	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$18\frac{2}{3}$	$14\frac{11}{15}$	$13\frac{31}{35}$	$13\frac{17}{63}$	$12\frac{62}{99}$

$H_4 = 760\,138\frac{34}{35}$; $H_5 = 9\,597\,714\frac{2}{7}$.

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru şaisprezece puncte

$N = 16 = H_0$,

$p_1 = u = \frac{1}{2}p_1^*$, $p_2 = u^2 - \frac{85}{4} = p_2^*$,

$p_3 = u^3 - 38\frac{1}{20}u = \frac{3}{10}p_3^*$,

$p_4 = u^4 - 53\frac{13}{14}u^2 + 337\frac{47}{112} = \frac{12}{7}p_4^*$,

$p_5 = u^5 - 69\frac{1}{6}u^3 + 917\frac{11}{48}u = 10p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−21	−63	189	45
3/2	3	−19	−179	129	115
5/2	5	−15	−265	23	131
7/2	7	−9	−301	−101	77
9/2	9	−1	−267	−201	−33
11/2	11	9	−143	−221	−143
13/2	13	21	91	−91	−143
15/2	15	35	455	273	143
Υ	680	5712	302 328	806 208	2 015 520
H	340	5712	90 698,4	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$21\frac{1}{4}$	$16\frac{4}{5}$	$15\frac{123}{140}$	$15\frac{5}{21}$	$14\frac{7}{12}$

$H_4 = 1\,382\,070\frac{6}{7}$; $H_5 = 20\,155\,200$.

Pentru **șaptesprezece** puncte

$N = 17 = H_6$,

$P_1 = u = p_1^*$, $P_2 = u^2 - 24 = p_2^*$,

$P_3 = u^3 - 43\,u = 6p_3^*$

$P_4 = u^4 - 61\,u^2 + 432 = 12\,p_4^*$,

$P_5 = u^5 - 78\frac{1}{3}\,u^3 + 1177\frac{1}{3}\,u = 20\,p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−24	0	36	0
1	1	−23	−7	31	55
2	2	−20	−13	17	88
3	3	−15	−17	−3	83
4	4	−8	−18	−24	36
5	5	1	−15	−39	−39
6	6	12	−7	−39	−104
7	7	25	7	−13	−91
8	8	40	28	52	104
Υ	408	7752	23256	Υ_4	Υ_5
H	408	7752	139536	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	24	19	18	$17\frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}$

$\Upsilon_4 = 201\,552$; $\Upsilon_5 = 2\,015\,520$;
$H_4 = 2\,418\,624$; $H_5 = 40\,310\,400$.

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru **optsprezece** puncte

$N = 18 = H_0$,

$P_1 = u = \frac{1}{2}\,p_1^*$, $P_2 = u^2 - 26\frac{11}{12} = \frac{2}{3}\,p_2^*$,

$P_3 = u^3 - 48\frac{1}{4}\,u = 3\,p_3^*$,

$P_4 = u^4 - 68\frac{1}{2}\,u^2 + 545\frac{1}{16} = 12\,p_4^*$,

$P_5 = u^5 - 88\frac{1}{18}\,u^3 + 1488\frac{89}{144}\,u = \frac{10}{3}\,p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−40	− 8	44	220
3/2	3	−37	−23	33	583
5/2	5	−31	−35	13	733
7/2	7	−22	−42	−12	588
9/2	9	−10	−42	−36	156
11/2	11	5	−33	−51	−429
13/2	13	23	−13	−47	−871
15/2	15	44	20	−12	−676
17/2	17	68	68	68	884
Υ	969	15 504	69 768	Υ_4	Υ_5
H	$484\frac{1}{2}$	10 336	209 304	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$26\frac{11}{12}$	$21\frac{1}{3}$	$20\frac{1}{4}$	$19\frac{5}{9}$	$18\frac{347}{396}$

$\Upsilon_4 = 311\,038$; $\Upsilon_5 = 2\,178\,410$;
$H_4 = 4\,093\,056$; $H_5 = 77\,261\,600$.

Pentru **nouășsprezece** puncte

$N = 19 = H_0$,

$P_1 = u = p_1^*$, $P_2 = u^2 - 30 = p_2^*$,

$P_3 = u_3 - 53\frac{4}{5}\,u = \frac{6}{5}\,p_3^*$,

$P_4 = u^4 - 76\frac{3}{7}\,u^2 + 678\frac{6}{7} = \frac{12}{7}\,p_4^*$,

$P_5 = u^5 - 98\frac{1}{3}\,u^3 + 1857\frac{1}{3}\,u = 40\,p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−30	0	396	0
1	1	−29	−44	352	44
2	2	−26	−83	227	74
3	3	−21	−112	42	79
4	4	−14	−126	−168	54
5	5	−5	−120	−354	3
6	6	6	−89	−453	−58
7	7	19	−28	−388	−98
8	8	34	68	−68	−68
9	9	51	204	612	102
Υ	570	13 566	255 816	Υ_4	Υ_5
H	570	13 566	306 979,2	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	30	$23\frac{4}{5}$	$22\frac{22}{35}$	$21\frac{19}{21}$	$21\frac{7}{33}$

$\Upsilon_4 = 3\,922\,512$;
$H_4 = 6\,724\,306\frac{2}{7}$;
$\Upsilon_5 = 3\,565\,920$;
$H_5 = 142\,636\,800$.

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru **douăzeci** de puncte

$N = 20 = H_0$.

$P_1 = u = \frac{1}{2}\,P_1^*$, $P_2 = u^2 - 33\frac{1}{4} = P_2^*$,

$P_3 = u^3 - 59\frac{13}{20}\,u = \frac{3}{10}\,P_3^*$,

$P_4 = u^4 - 84\frac{11}{14}\,u^2 + 835\frac{61}{80} = \frac{24}{35}\,P_4^*$,

$P_5 = u^5 - 109\frac{1}{6}\,u^3 + 2290\frac{29}{336}\,u = \frac{20}{7}\,P_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
1/2	1	−33	−99	1188	396
3/2	3	−31	−287	948	1076
5/2	5	−27	−445	503	1141
7/2	7	−21	−553	−77	1351
9/2	9	−13	−591	−687	771
11/2	11	−3	−539	−1187	−187
13/2	13	9	−377	−1402	−1222
15/2	15	23	−85	−1122	−1802
17/2	17	39	357	−102	−1122
19/2	19	57	969	1938	1938
Υ	1330	17 556	1 470 912	Υ_4	Υ_5
H	665	17 556	441 282,6	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$33\frac{1}{4}$	$26\frac{2}{5}$	$25\frac{19}{140}$	$24\frac{8}{21}$	$23\frac{89}{132}$

$\Upsilon_4 = 15\,690\,018$; $\Upsilon_5 = 89\,148\,000$;
$H_4 = 10\,758\,890\frac{2}{35}$; $H_5 = 254\,708\,571\frac{3}{7}$.

Tabelul XI (*continuare*)

Pentru douăzeci și unu de puncte

$N = 21 = H_6$,

$P_1 = u = p_1^*$, $P_2 = u^2 - 36\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,p_2^*$,

$P_3 = u^3 - 65\,\frac{4}{5}\,u = \frac{6}{5}\,p_3^*$,

$P_4 = u^4 - 93\,\frac{4}{7}\,u^2 + 1018\,\frac{2}{7} = \frac{12}{7}\,p_4^*$,

$P_5 = p^5 - 120\,\frac{5}{9}\,u^3 + 2793\,\frac{53}{63}\,u = \frac{40}{21}\,p_5^*$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−110	0	594	0
1	1	−107	−54	540	1101
2	2	−98	−103	385	2414
3	3	−83	−142	150	2819
4	4	−62	−166	−130	2354
5	5	−35	−170	−406	1063
6	6	−2	−149	−615	−788
7	7	37	−98	−680	−2618
8	8	82	−12	−510	−3468
9	9	135	114	0	−1938
10	10	190	285	969	3876
γ	770	67 298	519 156	γ_4	γ_5
H	770	$22432\frac{2}{3}$	622 987,2	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$36\frac{2}{3}$	$29\frac{2}{15}$	$27\frac{27}{35}$	$26\frac{62}{63}$	$26\frac{26}{99}$

$\gamma_4 = 9\,806\,280$; $\gamma_5 = 231\,784\,800$;

$H_4 = 16\,810\,705\frac{5}{7}$; $H_5 = 441\,404\,857\frac{1}{7}$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0	0	−11	0	858	0
1	1	−43	−26	793	65
2	2	−40	−50	605	116
3	3	−35	−70	315	141
4	4	−28	−81	−42	132
5	5	−19	−90	−417	87
6	6	−8	−86	−747	12
7	7	5	−70	−955	−77
8	8	20	−40	−950	−152
9	9	37	6	−627	−171
10	10	56	70	133	−76
11	11	77	154	1463	209
γ	1012	35 420	391 680	γ_4	γ_5
H	1012	35 420	1 181 010	H_4	H_5
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	44	35	$33\frac{3}{7}$	$32\frac{4}{7}$	$31\frac{9}{11}$

$\gamma_4 = 22\,406\,760$; $\gamma_5 = 20\,451\,600$;

$H_4 = 3\,565\,874\frac{2}{7}$; $H_5 = 1\,227\,096\,000\frac{1}{7}$

Tabelul XII (punctul 5.1.2)

Valorile critice $H = |r|\sqrt{n-1}$;

r este coeficientul empiric de corelație

n \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,99	0,999	n \ $\mathscr{P}$	0,95	0,99	0,999
10	1,65	1,90	2,29	2,62	25	1,941	2,475	3,026
11	1,65	1,90	2,32	2,68	26	1,941	2,479	3,037
12	1,65	1,91	2,35	2,73	27	1,942	2,483	3,047
13	1,65	1,92	2,37	2,77	28	1,943	2,487	3,056
14	1,65	1,92	2,39	2,81	29	1,943	2,490	3,064
15	1,65	1,92	2,40	2,85	30	1,944	2,492	3,071
16	1,65	1,93	2,41	2,87	35	1,947	2,505	3,102
17	1,65	1,93	2,42	2,90	40	1,949	2,514	3,126
18	1,65	1,93	2,43	2,92	45	1,950	2,521	3,145
19	1,65	1,93	2,44	2,94	50	1,951	2,527	3,161
20	1,65	1,94	2,45	2,96	60	1,953	2,535	3,183
21	1,65	1,94	2,45	2,98	70	1,954	2,541	3,198
22	1,65	1,94	2,46	2,99	80	1,955	2,546	3,209
23	1,65	1,94	2,47	3,00	90	1,956	2,550	3,219
24	1,65	1,94	2,47	3,02	100	1,956	2,553	3,226
					∞	1,960	2,576	3,291

Interpolarea liniară a valorilor critice H cu o precizie de pînă la 10^{-3} este permisă după argumentul $\frac{1}{n}$, adică cu formula

$$H(n) = H(n_0) + [H(n_1) - H(n_0)]\,\frac{n - n_0}{n_1 - n_0}\,\frac{n_1}{n} \quad (n_0 < n < n_1).$$

În particular, pentru $n > 100$ valorile critice H se pot calcula cu relația

$$H(n) = H(\infty) + [H(100) - H(\infty)]\,\frac{100}{n}.$$

De exemplu, pentru $\mathscr{P} = 0{,}99$ și $n = 200$ avem

$$H(200) = 2{,}576 + [2{,}553 - 2{,}576]\,\frac{100}{200} = 2{,}565.$$

Tabelul XIII (punctul 5.1.4)

Valorile minime admisibile ale raportului R (5.23) (n este numărul total al rezultatelor experimentului, $\mathscr{P}$ — nivelul de încredere).

n \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,99	n \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,99
10	0,268	0,220	0,139	30	0,655	0,623	0,553
11	0,309	0,260	0,174	35	0,693	0,664	0,600
12	0,345	0,296	0,207	40	0,723	0,697	0,639
13	0,378	0,329	0,238	45	0,748	0,723	0,670
14	0,407	0,359	0,268	50	0,768	0,745	0,696
15	0,434	0,386	0,296	55	0,785	0,764	0,718
16	0,458	0,412	0,321	60	0,799	0,780	0,737
17	0,480	0,435	0,346	65	0,811	0,794	0,753
18	0,500	0,456	0,368	70	0,822	0,806	0,768
19	0,519	0,476	0,389	75	0,832	0,816	0,780
20	0,536	0,494	0,409	80	0,841	0,826	0,792
22	0,567	0,527	0,445	90	0,855	0,842	0,811
24	0,593	0,555	0,477	100	0,867	0,855	0,827
26	0,617	0,581	0,505	200	0,926	0,919	0,904
28	0,637	0,603	0,530	300	0,948	0,943	0,933

Tabelul admite o interpolare liniară cu o precizie de pînă la 10^{-3} după argumentul n pentru $n<100$.

Pentru $n>100$ tabelul admite o interpolare liniară după argumentul $\frac{1}{n}$; de exemplu, pentru $\mathscr{P}=0,99$ și $n=150$ avem

$$R(150)=0,827+(0,904-0,827)\cdot\frac{50}{100}\cdot\frac{200}{150}=0,878.$$

Tabelul XIV (punctul 6.1.3)

Abscisele a_j și coeficienții H_j pentru formula de cvadratură (6.15)

n	a_j	H_j	Eroare *
2	0,585786 3,414214	0,853553 0,146447	$\frac{1}{6}f^{(4)}(c)$
3	0,415775 2,294280 6,289945	0,711093 0,278518 0,010389	$\frac{1}{20}f^{(6)}(c)$
4	0,322548 1,745761 4,536620 9,395071	0,603154 0,357419 0,038888 0,000539	$\frac{1}{70}f^{(8)}(c)$
5	0,263560 1,413403 3,596426 7,085810 12,640801	0,521756 0,398667 0,075942 0,003612 0,000023	$\frac{1}{252}f^{(10)}(c)$

* Aici c este un număr pozitiv oarecare

Tabelul XV (punctul 6.1.3)

Abscisele a'_j și coeficienții H'_j pentru formula cu cvadratură (6.16)

n	a'_j	H'_j	Eroare *
2	±0,707107	0,886227	$\frac{\sqrt{\pi}}{48}f^{(4)}(c)$
3	0 ±1,224745	1,181636 0,295409	$\frac{\sqrt{\pi}}{960}f^{(6)}(c)$
4	±0,524648 ±1,650680	0,804914 0,081313	$\frac{\sqrt{\pi}}{26880}f^{(8)}(c)$
5	0 ±0,958572 ±2,020183	0,945309 0,393619 0,019953	$1,832\cdot10^{-8}f^{(10)}(c)$

* Aici c este un număr real oarecare.

ÎN SERIA „MATEMATICI MODERNE APLICATE"

au apărut:

1. STUART R. D.
   „Introducere în analiza Fourier, cu aplicații în tehnică" (1971)
2. JAGER I. C., NEWSTEAD G. H.
   „Introducere în transformarea Laplace, cu aplicații în tehnică" (1971)
3. SALVADORI M., BARON M.
   „Metode numerice în tehnică" (1972)
4. CULLMANN G.
   „Coduri detectoare și corectoare de erori" (1972)
5. KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.
   „Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă" vol. I (1973)
6. TEMAM R.
   „Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor funcționale" (1973)
7. MOSZYNSKI K.
   „Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare" (1973)
8. KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.
   „Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă" vol. II (1973)
9. FREUDETHAL H.
   „Limbajul logicii matematice"
10. NEGOIȚĂ C. V., RALESCU D. A.
    „Mulțimi vagi și aplicațiile lor" (1974)
11. RUMȘISKI L. Z.
    „Prelucrarea matematică a datelor experimentale"

vor apărea:

12. GHIRCOIAȘIU N., MIRON C.
    „Grafuri de fluență și aplicații în tehnică"
13. MARVIN FORRAY
    „Calculul variațional în știință și tehnică"
14. TEODORESCU P. P., KECS W.
    „Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică"
15. VRACIU G., LEONTE A.
    „Calculul matriceal cu aplicații"
16. RĂCOVEANU N. ș.a.
    „Rezolvarea numerică a ecuațiilor de tip parabolic"

Bun de tipar 12.4.1974 6300 ex

EDITURA TEHNICĂ

Lei 7,25

Tabelul XIII (punctul 5.1.4)

Valorile minime admisibile ale raportului R (5.23) (n este numărul total al rezultatelor experimentului, $\mathscr{P}$ — nivelul de încredere).

n \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,99	n \ $\mathscr{P}$	0,90	0,95	0,99
10	0,268	0,220	0,139	30	0,655	0,623	0,553
11	0,309	0,260	0,174	35	0,693	0,664	0,600
12	0,345	0,296	0,207	40	0,723	0,697	0,639
13	0,378	0,329	0,238	45	0,748	0,723	0,670
14	0,407	0,359	0,268	50	0,768	0,745	0,696
15	0,434	0,386	0,296	55	0,785	0,764	0,718
16	0,458	0,412	0,321	60	0,799	0,780	0,737
17	0,480	0,435	0,346	65	0,811	0,794	0,753
18	0,500	0,456	0,368	70	0,822	0,806	0,768
19	0,519	0,476	0,389	75	0,832	0,816	0,780
20	0,536	0,494	0,409	80	0,841	0,826	0,792
22	0,567	0,527	0,445	90	0,855	0,842	0,811
24	0,593	0,555	0,477	100	0,867	0,855	0,827
26	0,617	0,581	0,505	200	0,926	0,919	0,904
28	0,637	0,603	0,530	300	0,948	0,943	0,933

Tabelul admite o interpolare liniară cu o precizie de pînă la 10^{-3} după argumentul n pentru $n<100$.

Pentru $n>100$ tabelul admite o interpolare liniară după argumentul $\frac{1}{n}$; de exemplu, pentru $\mathscr{P}=0{,}99$ și $n=150$ avem

$$R(150) = 0{,}827 + (0{,}904 - 0{,}827)\cdot\frac{50}{100}\cdot\frac{200}{150} = 0{,}878.$$

Tabelul XIV (punctul 6.1.3)

Abscisele a_j și coeficienții H_j pentru formula de cvadratură (6.15)

n	a_j	H_j	Eroare *
2	0,585786 3,414214	0,853553 0,146447	$\frac{1}{6} f^{(4)}(c)$
3	0,415775 2,294280 6,289945	0,711093 0,278518 0,010389	$\frac{1}{20} f^{(6)}(c)$
4	0,322548 1,745761 4,536620 9,395071	0,603154 0,357419 0,038888 0,000539	$\frac{1}{70} f^{(8)}(c)$
5	0,263560 1,413403 3,596426 7,085810 12,640801	0,521756 0,398667 0,075942 0,003612 0,000023	$\frac{1}{252} f^{(10)}(c)$

* Aici c este un număr pozitiv oarecare

Tabelul XV (punctul 6.1.3)

Abscisele a'_j și coeficienții H'_j pentru formula cu cvadratură (6.16)

n	a'_j	H'_j	Eroare *
2	$\pm 0{,}707107$	0,886227	$\frac{\sqrt{\pi}}{48} f^{(4)}(c)$
3	0 $\pm 1{,}224745$	1,181636 0,295409	$\frac{\sqrt{\pi}}{960} f^{(6)}(c)$
4	$\pm 0{,}524648$ $\pm 1{,}650680$	0,804914 0,081313	$\frac{\sqrt{\pi}}{26880} f^{(8)}(c)$
5	0 $\pm 0{,}958572$ $\pm 2{,}020183$	0,945309 0,393619 0,019953	$1{,}832\cdot 10^{-5} f^{(10)}(c)$

* Aici c este un număr real oarecare.